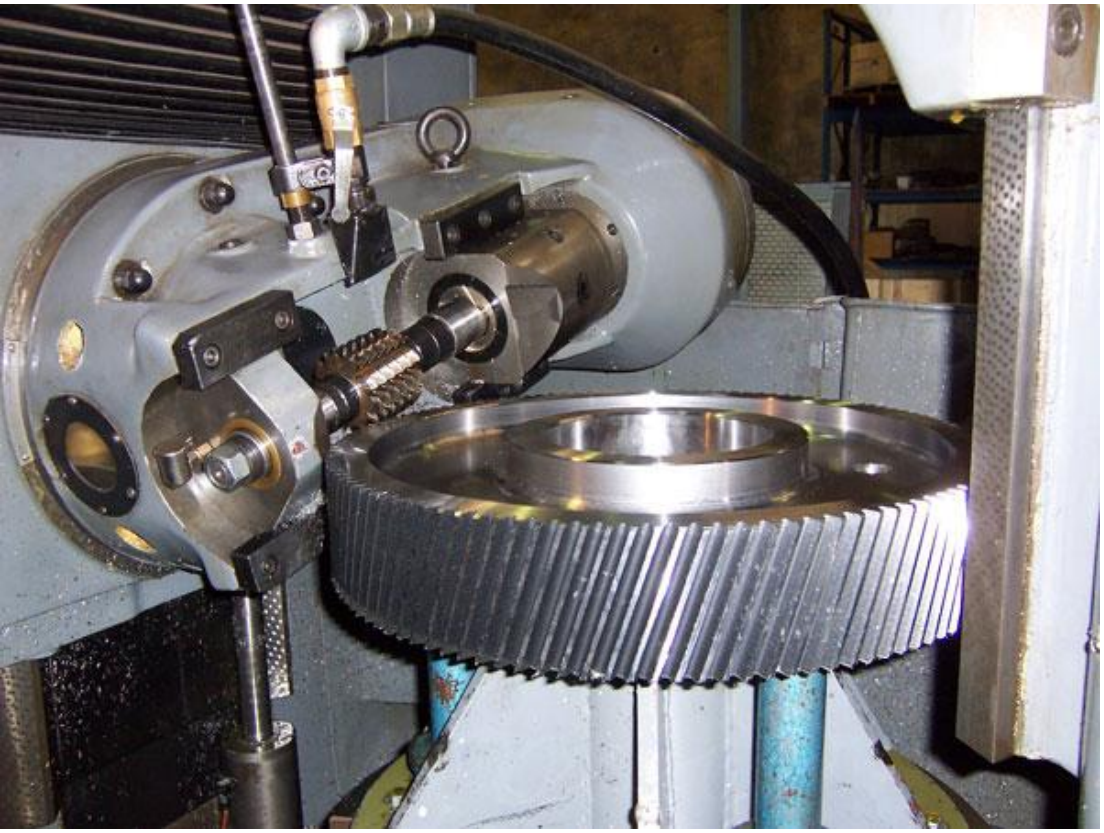
فصل ۹

چرخدنده و مجموعه چرخدنده ها



Non-uniform motion or force transformer مکانیزم هایی که در فصلهای قبلی مورد بررسی قرار گرفته اند ، به عنوان:

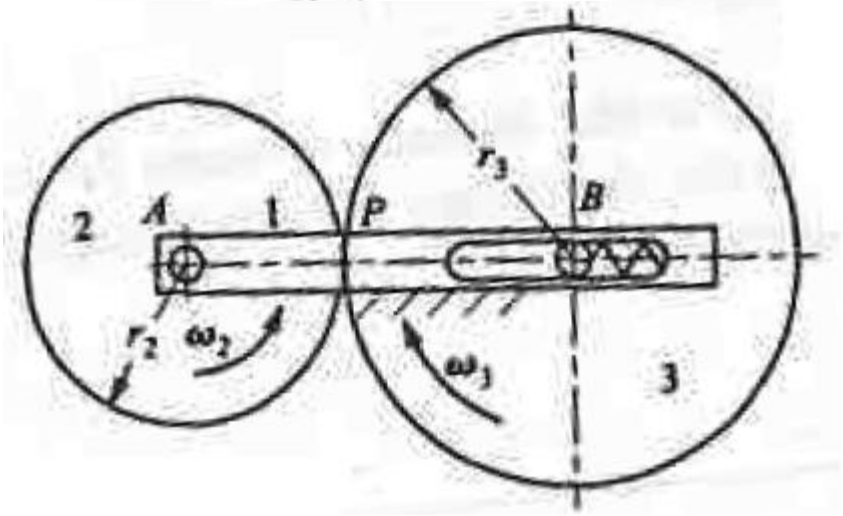
شناخته می شوند. در حالاتی که انتقال حرکت یکنواخت (نسبت سرعت ثابت) لازم باشد از چرخدنده ، تسمه یا زنجیر استفاده می شود.

در این مکانیزه ها اگر محور ورودی با سرعت زاویه ای ثابت دوران نماید ، محور خروجی نیز با سرعت ثابت دوران می کند. اگرچه در عمل ممکن است اندکی نوسان در خروجی وجود داشته باشد.

علت این نواسانات از نحوه عملکرد سیستم یا از نواقص ساخت است.

- انتقال قدرت کم توسط مکانیزمهای اصطکاکی صورت می گیرد.
- اگر حرکت بدون لغزش باشد:

$$v_{P_2} = v_{P_3}$$
$$\omega_2 \times r_{P/A} = \omega_3 \times r_{P/B}$$
$$\omega_2 r_2 = \omega_3 r_3$$

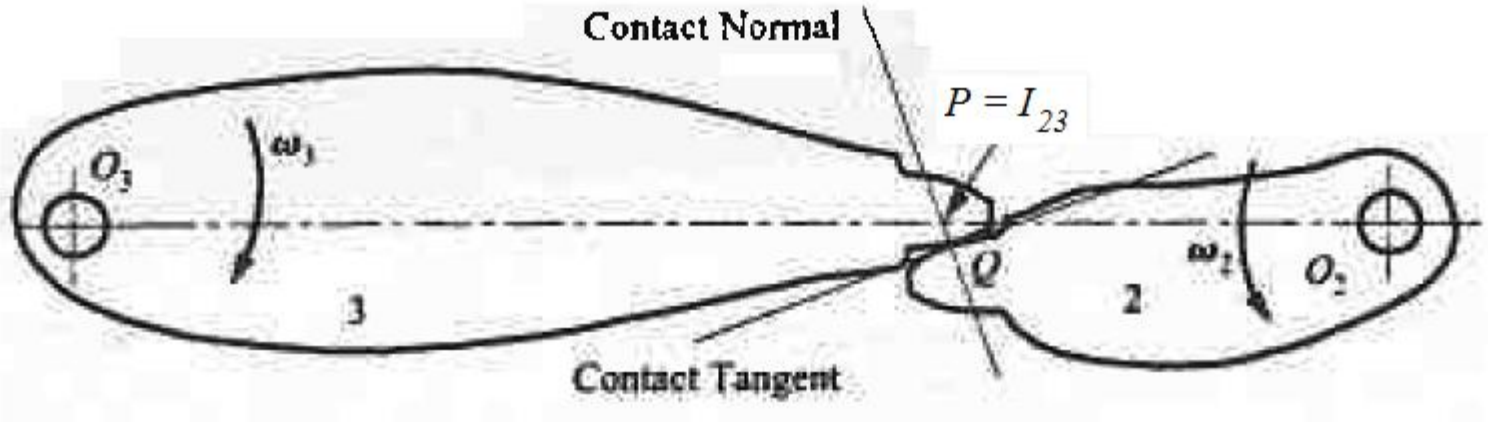


- دو دیسک در خلاف جهت هم دوران می کنند.
- مزایا: سروصدا کم ، هزینه کم و نرم بودن حرکت
- معایب: توان کم ، حساس بودن به ذرات

- چرخدنده مستقیم (Spur Gears)
  - برای انتقال قدرت از یک محور به محور دیگر استفاده می شود
  - لزوم نسبت سرعت ثابت
    - محور خروجی بطور پیوسته حرکت شتابدار افزایشی کاهشی خواهد داشت.
    - تنشهای سیکلی ، ارتعاشات ، سروصدا ، تلف شدن توان و ....
  - پروفیل تماس دندانه هایی که نسبت سرعت ثابت ایجاد می کنند ، conjugate یا مزدوج نامیده می شود.
  - اگر پروفیل یک دندانه داده شده باشد می توان پروفیل دندانه مقابل را با استفاده از روشهای ترسیمی یا تحلیلی بست آورد.

- در عمل تعداد کمی پروفیل مورد استفاده قرار می گیرند.
  - ساده ترین نوع چرخدنده ، چرخدنده مستقیم است
    - محورهای خروجی موازیند
    - پروفیل دندانه ها involute
    - انواع دیگر چرخدنده

- شرط نسبت سرعت ثابت



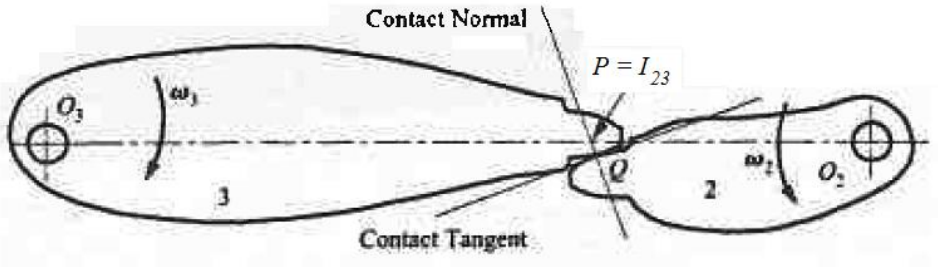
- مرکز آنی I_{23} در محل برخورد عمود مشترک و خط مرکز قرار گرفته است.
- I_{23} نقطه گام (pitch point) نامیده می شود

- اندازه نسبت سرعت

$$\omega_2 O_2 P = \omega_2 O_2 I_{23} = -\omega_3 O_3 I_{23} = -\omega_3 O_3 P$$

$$R = \frac{\omega_2}{\omega_3} = \frac{O_3 P}{O_2 P}$$

- جهت بدست آوردن نسبت سرعت ثابت باید موقعیت نقطه P در روی خط مراکز ثابت باقی بماند.



- سرعت لغزش(V_S)
  - پارامتر مهمی در ارتباط با نرخ سایش دندانه می باشد.

$$v_s = {}^1v_{Q_2/Q_3} = {}^3v_{Q_2/Q_3} = {}^3v_{Q_2/P_2} + {}^3v_{P_2/P_3} + {}^3v_{P_3/Q_3} = {}^3v_{Q_2/P_2} = {}^3\omega_2 \left(r_{Q/P}\right)$$

$${}^3\omega_2 = {}^1\omega_2 - {}^1\omega_3$$

$$v_s = \left(r_{Q/P}\right)\left(\omega_2 - \omega_3\right)$$

$$v_s = PQ\left|\omega_2 - \omega_3\right|$$

سرعت لغزش در نقطه تماس

سرعت لغزش به نسبت فاصله بین نقطه تماس P و نقطه گام Q می باشد.

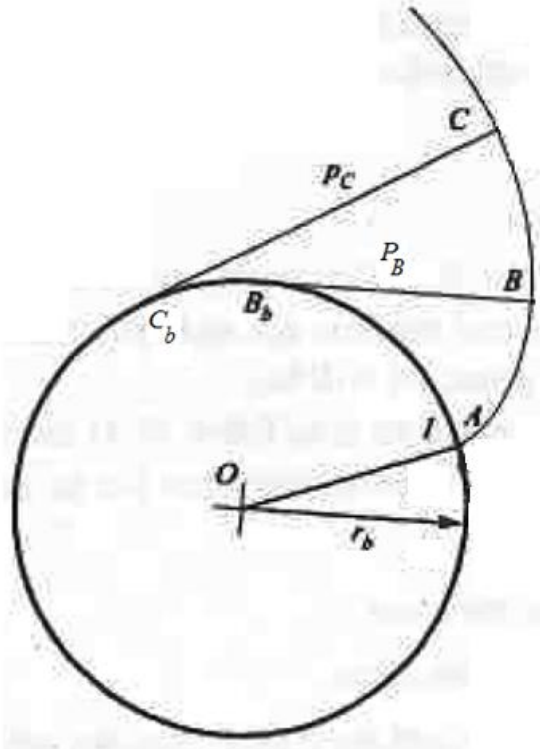
وقتی این دو منطبق باشند ، بطور لحظه ای لغزش داریم.

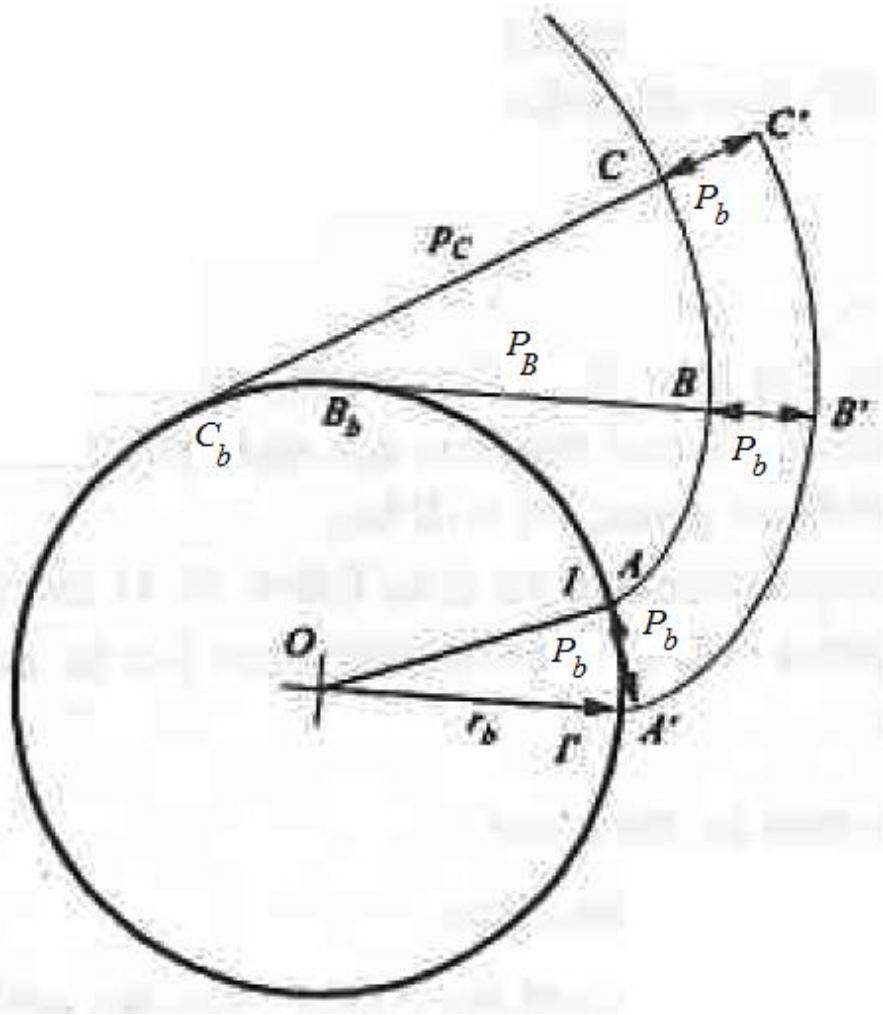
- Involutes
  - بین پروفیلهای ارائه شده برای چرخدنده ها ، involutes و cycloid متداول تر می باشند.
  - بین ایندو نیز در اغلب موارد از involutes استفاده می شود.
  - Involutes مزایای متعددی دارد اما دو مورد مهمتر است:

۱) از لحاظ ساخت با ابزارآلات ساده تری ساخته می شود.

۲) نسبت سرعت حتی در صورت تغییر فاصله مراکز ثابت باقی می ماند.

- پروفیل involutes
  - مسیر طی شده توسط نقطه انتهای یک رشته که بصورت کاملا کشیده از روی یک دایره باز می شود.
  - این دایره base circle نامیده می شود





خواص منحنی involutes

۱) عمود بر منحنی در هر نقطه مماس بر دایره پایه است.

۲) طول عمود مساوی قوس متناظر روی دایره پایه است.

$$B_bB = \text{arc } B_bI \qquad C_bC = \text{arc } C_bI$$

فاصله عمودی بین دو involutes که از روی یک دایره پایه باز می شوند مساوی است

$$AA' = BB' = CC'$$

۱) طول عمود مساوی شعاع انحناء involutes در آن نقطه است.

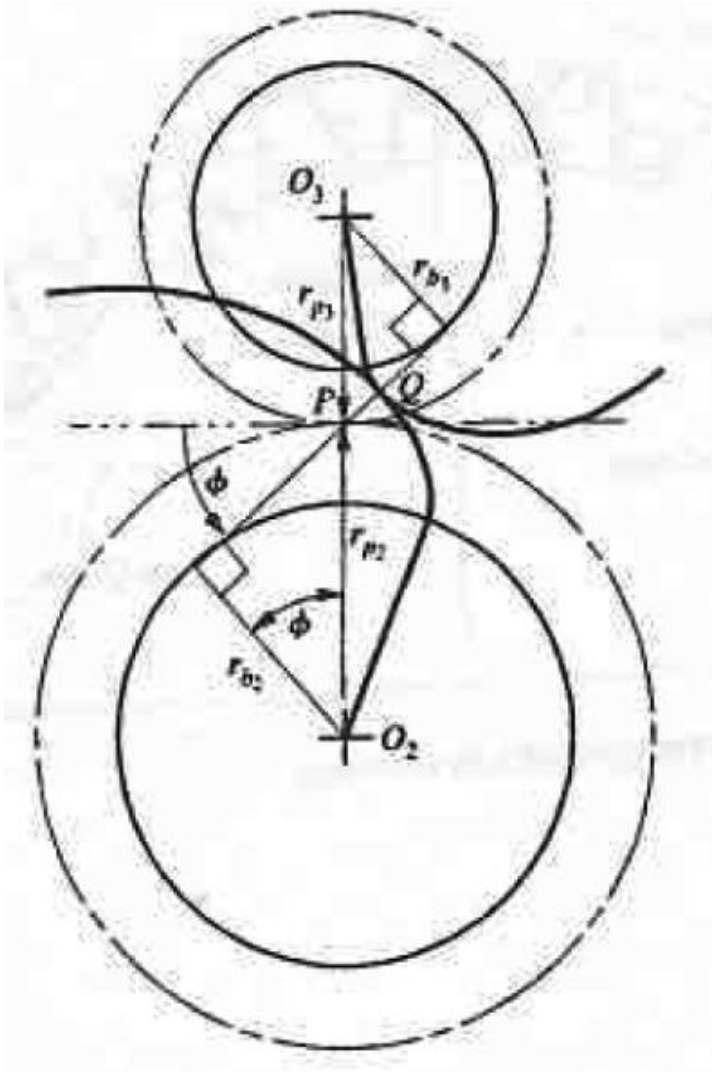
$$B_bB' = \rho_B, C_bC' = \rho_C$$

۲) هردو منحنی involutes دلخواه بدون در نظر گرفتن قطر دایره پایه conjugate یکدیگرند.

۳) مسیر تماس بین دو پروفیل involutes خطی است ، در نتیجه زاویه فشار ثابت باقی می ماند.

۴) چرخدنده با دندانه های involutes را می توان توسط یک Straight-sided Rack Cutter تولید کرد.

۵) دو منحنی involutes مزدوج باقی می مانند حتی اگر اندکی فاصله مرکز تغییر نمایید.



در شکل مقابل دو منحنی involutes در موقعیت دلخواه در تماس (نقطه Q) می باشند. عمود در نقطه تماس با دو دایره پایه مماس می باشد. لذا عمود مشترک ثابت باقی می ماند. همچنین محل تلاقی عمود با خط مراکز نقطه P ثابت باقی می ماند. در نتیجه نسبت سرعت ثابت است. (r_p شعاع دایره گام)

$$R = \frac{O_3P}{O_2P} = \frac{r_{p_3}}{r_{p_2}}$$

- ارتباط شعاع دایره گام و پایه

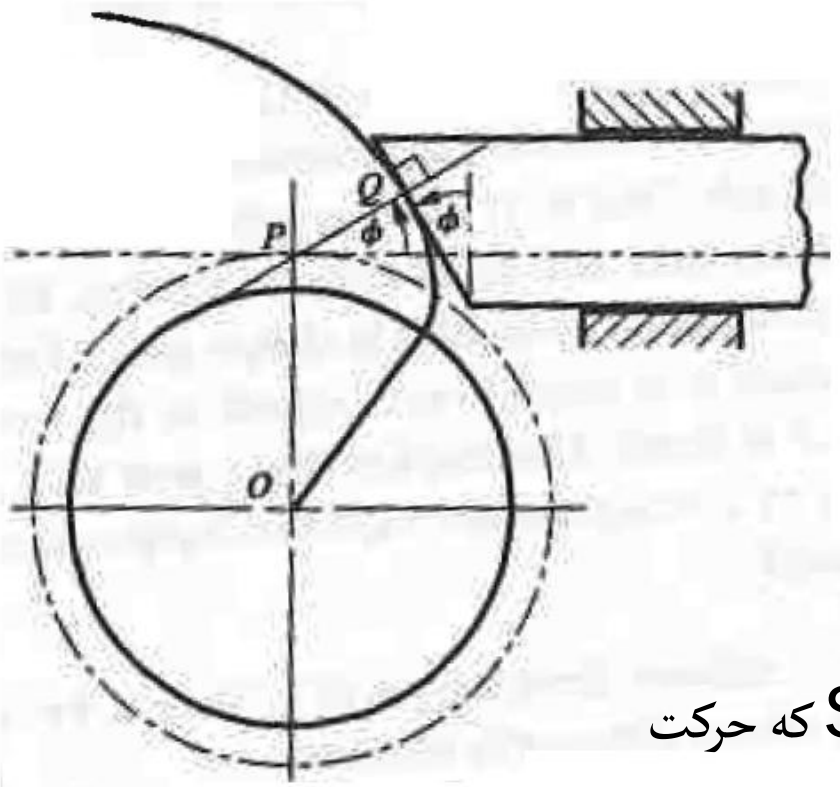
$$r_{p_2} = \frac{r_{b_2}}{\cos\phi} \qquad r_{p_3} = \frac{r_{b_3}}{\cos\phi}$$

- زاویه فشار (ϕ) زاویه بین عمود در نقطه تماس و مماس بر دایره های گام می باشد.

- ازآنجائیکه عمود در نقطه تماس ثابت است ، نقطه تماس در روی عمود جابجا می شود.

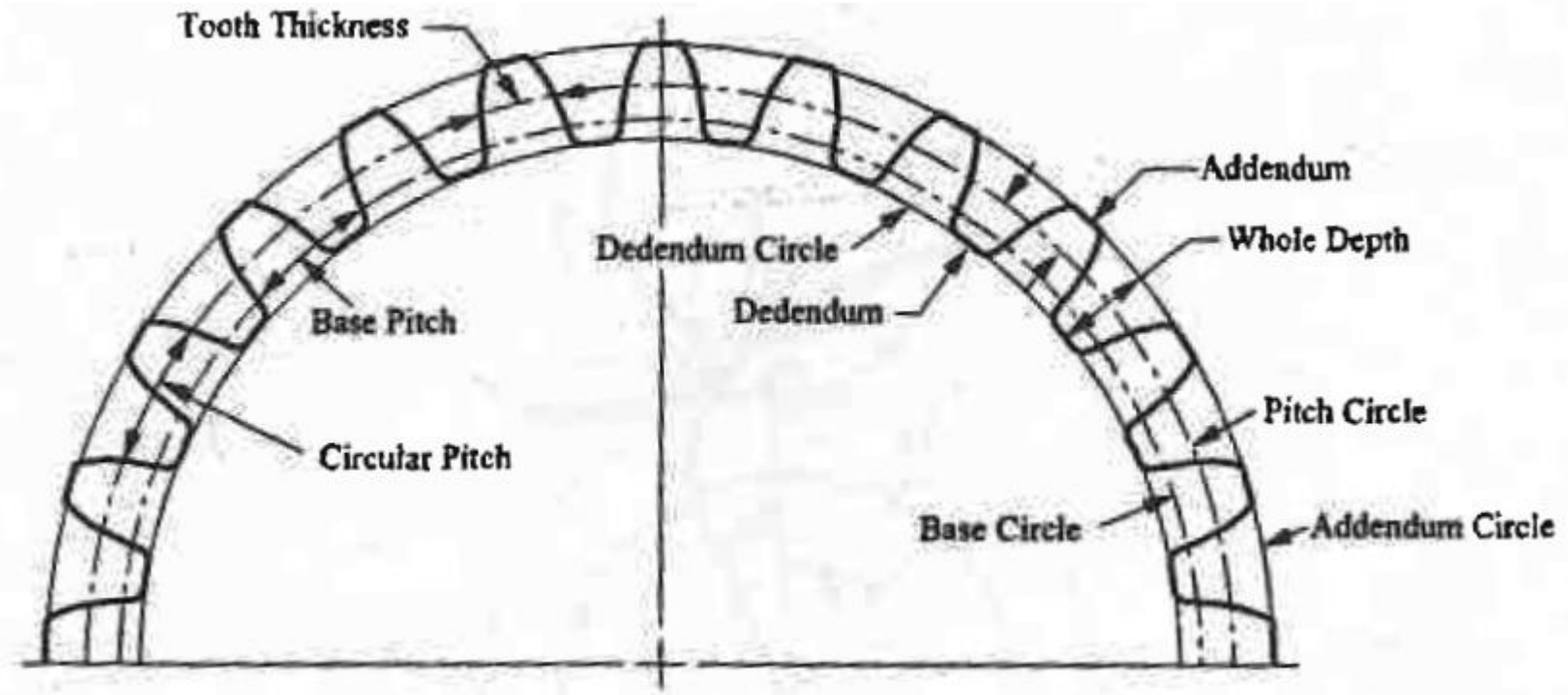
این پروفیل مزدوج یک Straight-Sided Rack می باشد.

اگر یک پروفیل خطی با زاویه ϕ نسبت به خط OP داشته باشیم ، این خط حرکت انتقالی داشته و حرکت دورانی نخواهد داشت.عمود در نقطه تماس همیشه عمود برپروفیل خطی و مماس بر دایره پایه خواهد بود.



نقطه P ثابت است لذا می توان با یک Straight-Sided Rack Cutter که حرکت رفت و برگشتی دارد پروفیل involutes را ایجاد کرد.

- الفاظ استفاده شده در چرخدنده ها



Gear tooth in-plane geometry terminology

- دایره گام در چرخدنده های درگیر نسبت بهم غلتش دارند
- اگرچه یک چرخدنده طوری طراحی می شود که دایره گام معینی داشته باشد اما دایره گام واقعی بستگی به چرخدنده مقابل و فاصله مراکز آنها دارد.

$$\textit{diametral pitch} \quad P_d = N/d_p$$

$$\text{circular pitch} \quad p_c = \pi d_p/N$$

- پارامتر های مهم چرخدنده

$$P_d = \pi / p_c$$

$$P_d p_c = \pi$$

$$p_b = \pi d_b / N$$

$$d_p = \frac{d_b}{\cos\phi}$$

$$p_c = \pi d_p / N = \frac{\pi d_b}{N \cos\phi} = \frac{p_b}{\cos\phi}$$

$$p_b = p_c \cos\phi$$

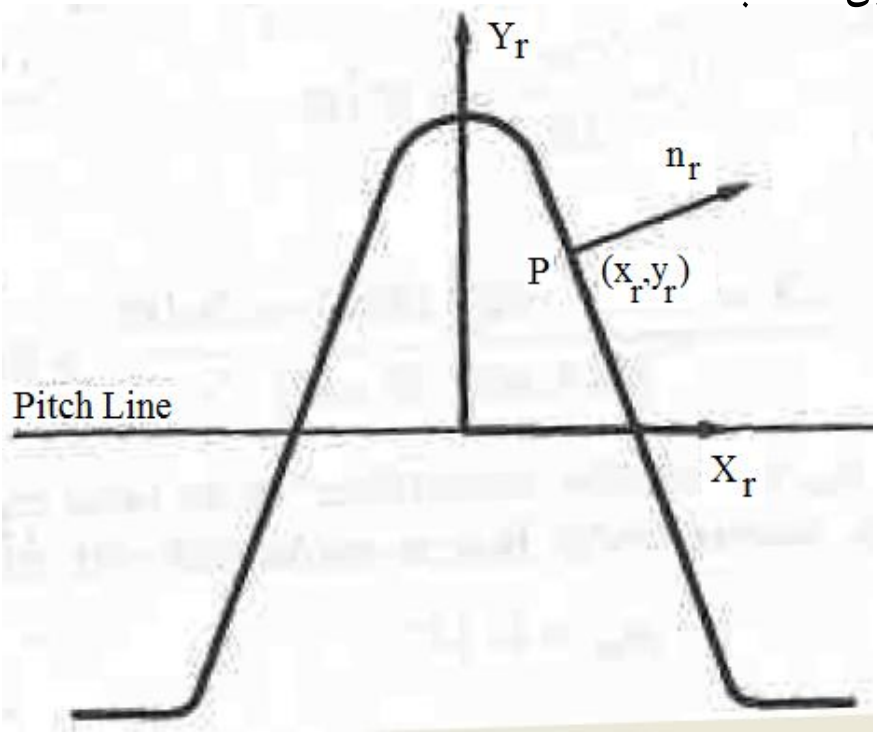
$$m = \frac{d_p}{N}$$

$$p_c = m\pi$$

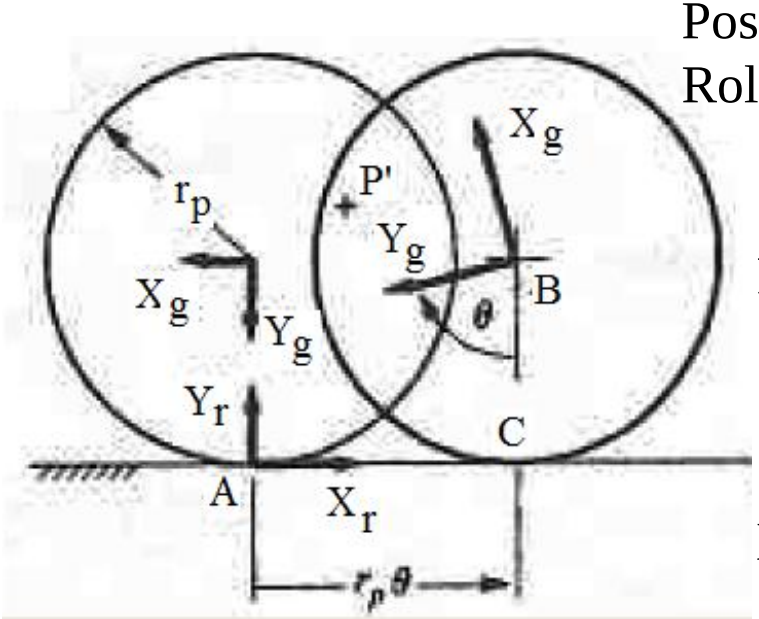
- دو چرخدنده در گیر باید گامهای یکسانی داشته باشند
  گام قطری ، گام دایره ای و مدول یکسان
- چرخدنده های که با ابعاد استاندارد ساخته شده باشند ، قابل تعویض می باشند. به عبارت دیگر هر جفت چرخدنده ای که گام یکسانی داشته باشند قابل استفاده در مقابل یکدیگرند.
- لذا باید:
  - زاویه فشار یکسان
  - گام قطری یکسان
  - ارتفاع سر و پای دندانه
  - پهنای دندانه
  - undercut

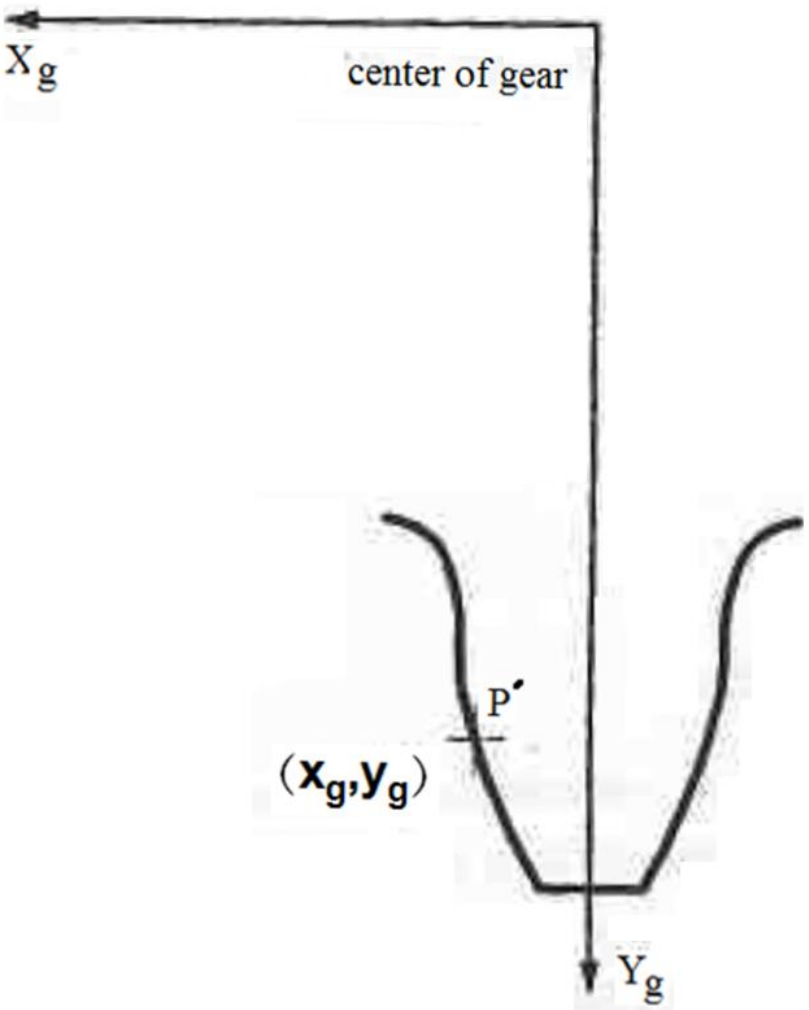
مختصات یک دندانه involutes تولیده شده توسط یک rack

موقعیت نقطه دلخواه مانند P روی rack با مختصات (x_r,y_r) نمایش داده شده که نسبت به دستگاه مختصات ثابت به rack می باشد. بردار نرمال بر سطح نیز با $n_r=(n_x,n_y)$ نمایش داده می شود. براحتی این مختصات و بردار نرمال قابل محاسبه است.



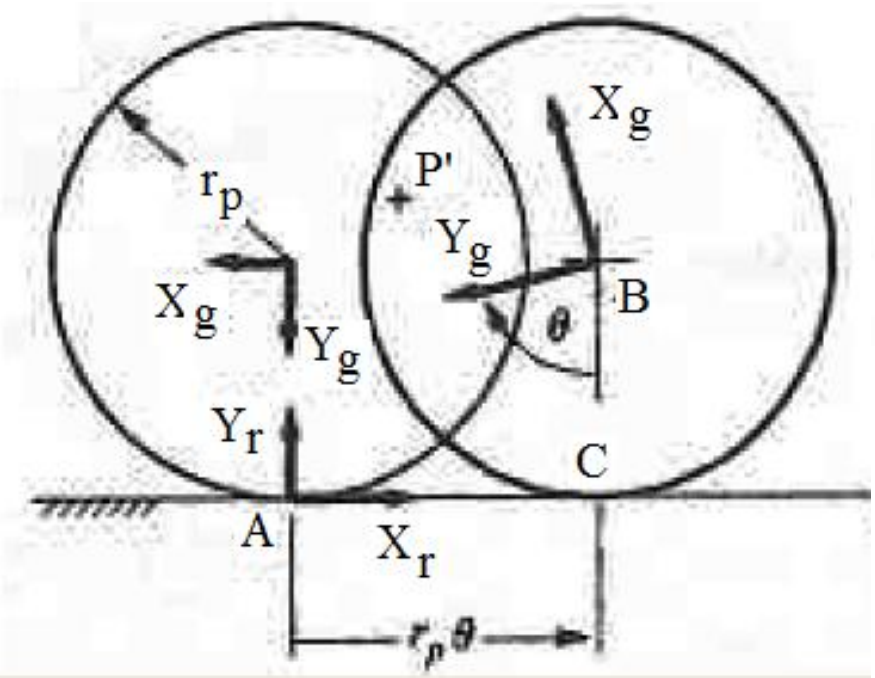
- دستگاه مختصات اول متصل به rack ثابت فرض می شود (X_r, Y_r)
- دستگاه مختصات دوم متصل به gear و با آن حرکت دورانی خطی دارد (x_g, y_g)
- نقطه p’ متعلق به gear متناظر با نقطه P در روی rack است.
- دایره گام چرخدنده روی خط گام rack غلتش دارد.
- نقطه P در لحظه تماس با P’ تماس لغزشی (direct contact) دارد.



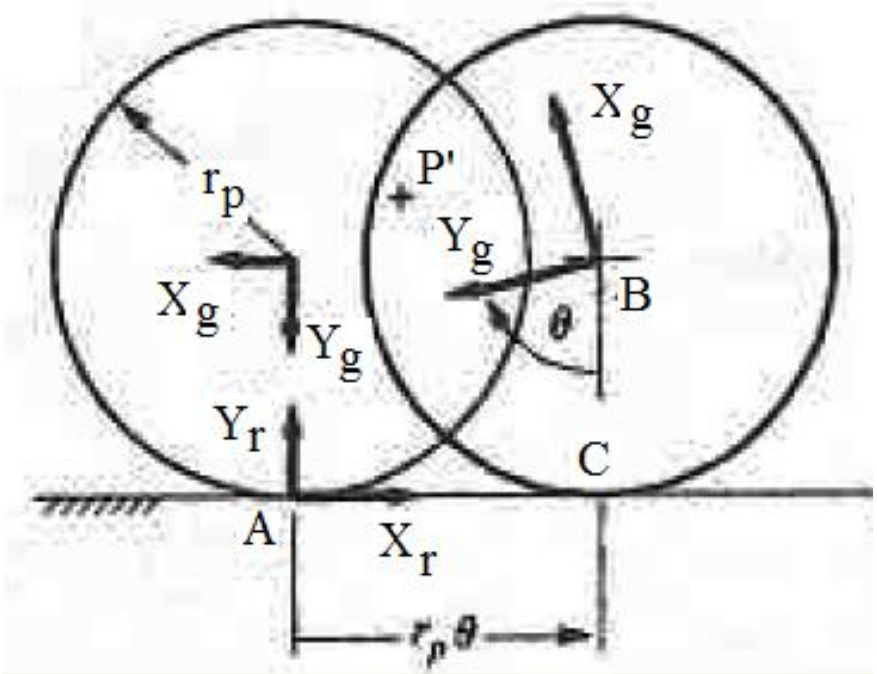


دستگاه مختصات متحرک متصل به چرخدنده و نقطه p' متعلق به gear متناظر با نقطه P در روی rack میباشد.

- در موقعیت دوم در شکل زیر چرخدنده به اندازه زاویه θ دوران و به اندازه $r_p\theta$ جابجائی خطی داشته است.
- برای این موقعیت دلخواه ماتریس تبدیل از دستگاه rack به دستگاه چرخدنده به صورت زیر بدست می آید:



$$\begin{Bmatrix} x_g \\ y_g \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & -\cos\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_r - r_p\theta \\ y_r - r_p \end{Bmatrix}$$



سرعت نسبی نقطه P' نسبت به دستگاه rack ، نقطه C مرکز آنی است

$$^{r}v_P = {}^{r}v_{B/C} + {}^{r}v_{P/B}$$

$$^{r}v_P = {}^{r}\omega_g \times r_{B/C} + {}^{r}\omega_g \times r_{P/B} = {}^{r}\omega_g \times \left(r_{B/C} + r_{P/B}\right) = {}^{r}\omega_g \times r_{P/C}$$

$$^{r}v_P = -{}^{r}\omega_g \begin{Bmatrix} y_r \\ r_p\theta - x_r \end{Bmatrix}$$

- توجه نمایید که سرعت نسبی در این نقطه نباید مولفه عمود بر سطح داشته باشد. در نتیجه داریم:

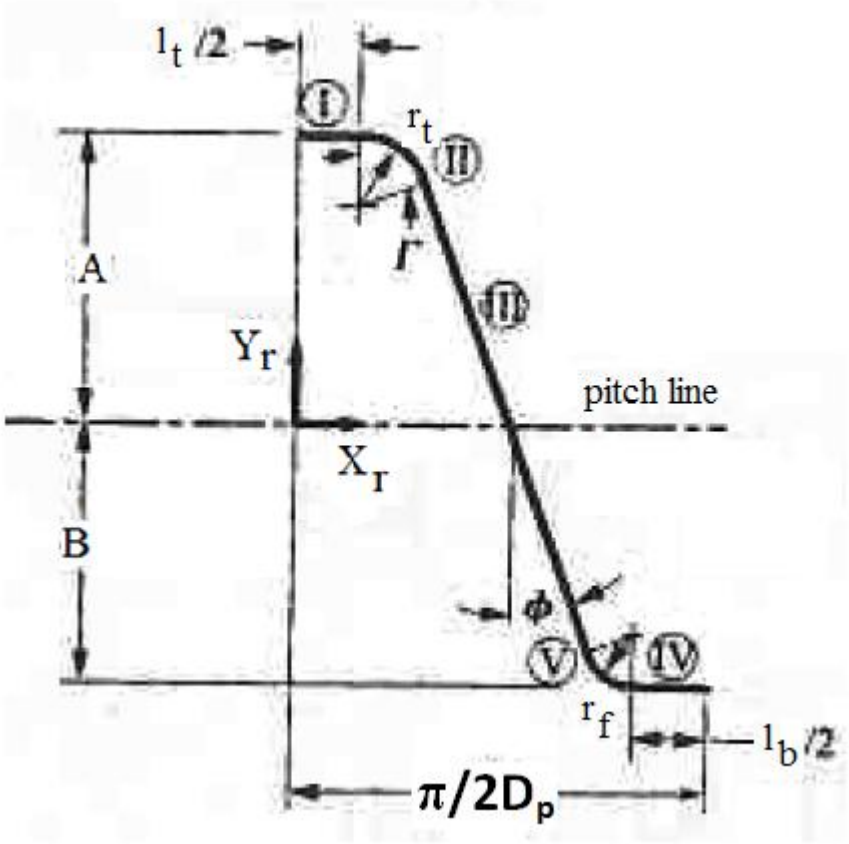
$$ {}^{r}v_P \cdot \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \end{Bmatrix} = 0 $$

$$ -n_x y_r + \left(x_r - r_p\theta\right) n_y = 0 $$

زاویه دورانی که در آن نقطه **P** با نقطه متناظر در روی چرخدنده در تماس است.

$$ \theta = \frac{n_y x_r - n_x y_r}{r_p n_y} $$

- پروفیل نصف دندانه یک rack در شکل نشان داده شده است.



D_p = diametral pitch

A = addendum of rack

B = dedendum of rack

ϕ = pressure angle

r_t = radius of tip of rack tooth

r_f = radius of fillet of rack tooth

- تعریف پارامترهای مورد استفاده

$$\Gamma = \frac{\pi}{2} - \phi$$

$$\ell_t = \frac{\pi}{2D_p} - 2A\tan\phi - 2r_t \tan\left(\frac{\Gamma}{2}\right)$$

$$\ell_b = \frac{\pi}{2D_p} - 2B\tan\phi - 2r_f \tan\left(\frac{\Gamma}{2}\right)$$

$$r_t = \frac{\frac{\pi}{2D_p} - 2A\tan\phi}{2\tan\left(\frac{\Gamma}{2}\right)}$$

$$r_f = \frac{\frac{\pi}{2D_p} - 2B\tan\phi}{2\tan\left(\frac{\Gamma}{2}\right)}$$

- روابط در ناحیه های مختلف

Region I (top land)

$$\begin{Bmatrix} x_r \\ y_r \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \beta \ell_t / 2 \\ A \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \qquad (0 < \beta \le 1)$$

Region II (tip radius)

$$\begin{Bmatrix} x_r \\ y_r \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \ell_t / 2 + r_t \sin(\beta\Gamma) \\ A - r_t [1 - \cos(\beta\Gamma)] \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sin(\beta\Gamma) \\ \cos(\beta\Gamma) \end{Bmatrix} \qquad (0 < \beta \le 1)$$

Region III (tooth flank)

$$\begin{Bmatrix} x_r \\ y_r \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} (1-\beta)[\ell_t / 2 + r_t \sin(\Gamma)] + \beta[\pi/(2D_p) - \ell_b/2 - r_f \sin\Gamma] \\ (1-\beta)[A - r_t\{1 - \cos(\Gamma)\}] + \beta[-B + r_f(1 - \cos\Gamma)] \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \cos\phi \\ \sin\phi \end{Bmatrix} \quad (0 < \beta \le 1)$$

- روابط در ناحیه های مختلف

Region IV (root fillet)

$$\begin{Bmatrix} x_r \\ y_r \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \pi/(2D_p) - \ell_b/2 - r_f \sin[(1-\beta)\Gamma] \\ -B + r_f\{1-\cos[(1-\beta)\Gamma]\} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sin[(1-\beta)\Gamma] \\ \cos[(1-\beta)\Gamma] \end{Bmatrix} \qquad (0 < \beta \le 1)$$

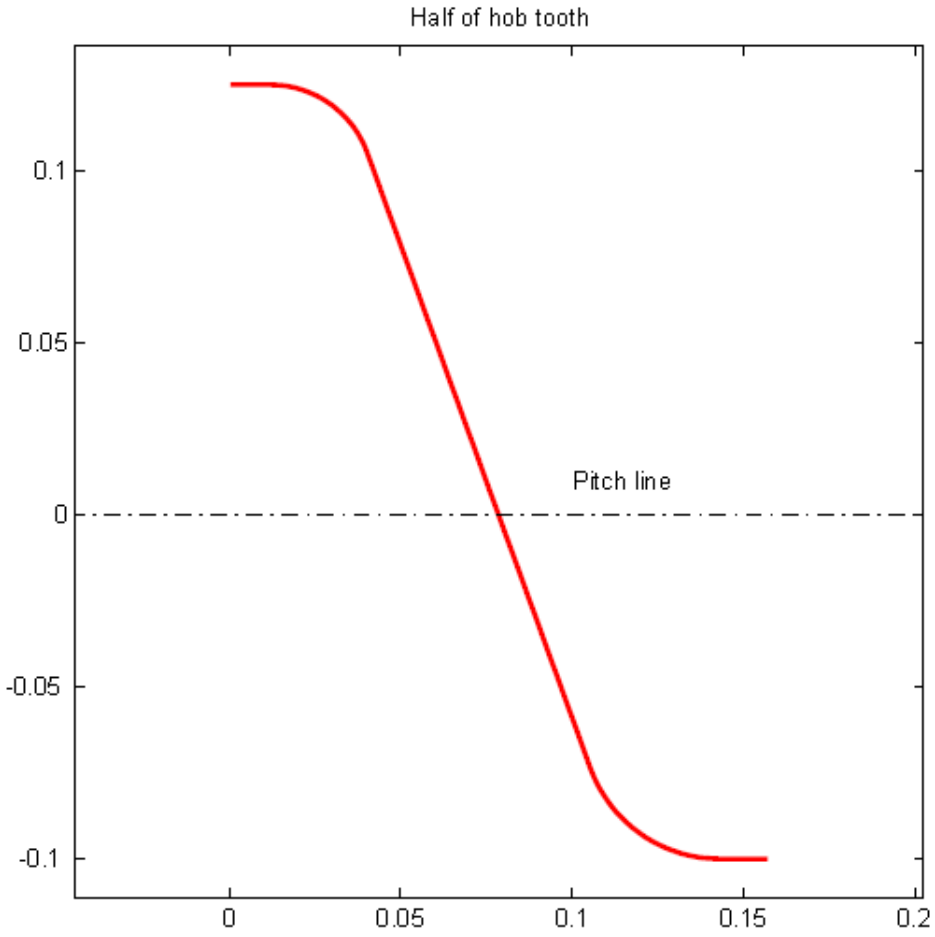
Region V (bottom land)

$$\begin{Bmatrix} x_r \\ y_r \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \pi/(2D_p) - \ell_b/2(1-\beta) \\ -B \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \qquad (0 < \beta \le 1)$$

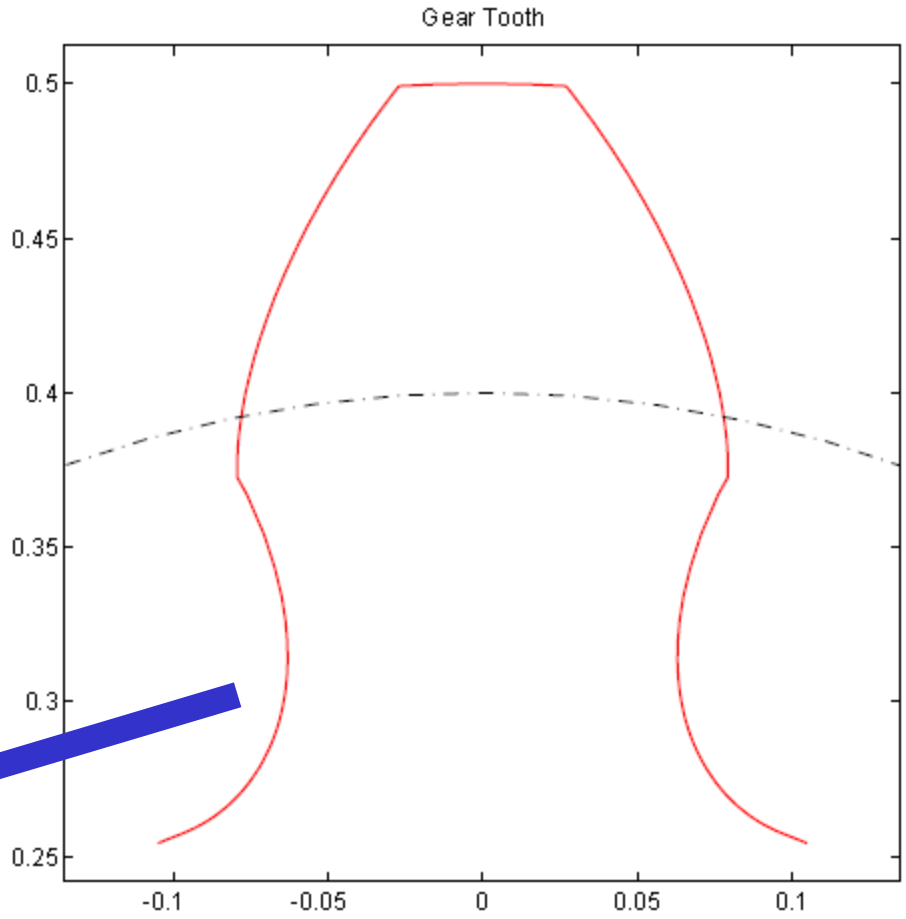
Assume that the above rack is used to generate a gear. The pressure angle is 20° with a diametric pitch (D_p) of 10 teeth per inch. The rip and root radii are both 0.0I in. The addendum constant for the rack is 1.25, and the dedendum constant is 1.1. There are 15 teeth on the gear, and the addendum constant for the gear is 1.0. Determine the shape of the gear tooth.

mfile : geardr.m

- Gear Tooth Generation Program
- Enter 1 for file input and 2 for interactive input [1]: 2
- Enter input file name (geardr.dat): manual.dat
- Enter value of diametral pitch [10]: 10
- Enter value of addendum constant for rack [1.25]: 1.25
- Enter value of dedendum constant for rack[1.0]: 1.0
- Enter value of pressure angle in degrees [20]: 20
- Enter radius of tip of rack tooth [0.02]: 0.03
- Enter radius of fillet of rack tooth [0.04]: 0.04
- Enter number of teeth on gear [10]: 8
- Enter value of addendum constant for gear [1.0]: 1
- Enter number of points in rack tip land [30]: 30
- Enter number of points in rack tip radius [30]: 30
- Enter number of points in rack flank [40]: 40
- Enter number of points in rack base radius [30]: 30
- Enter number of points in rack bottom land [30]: 30



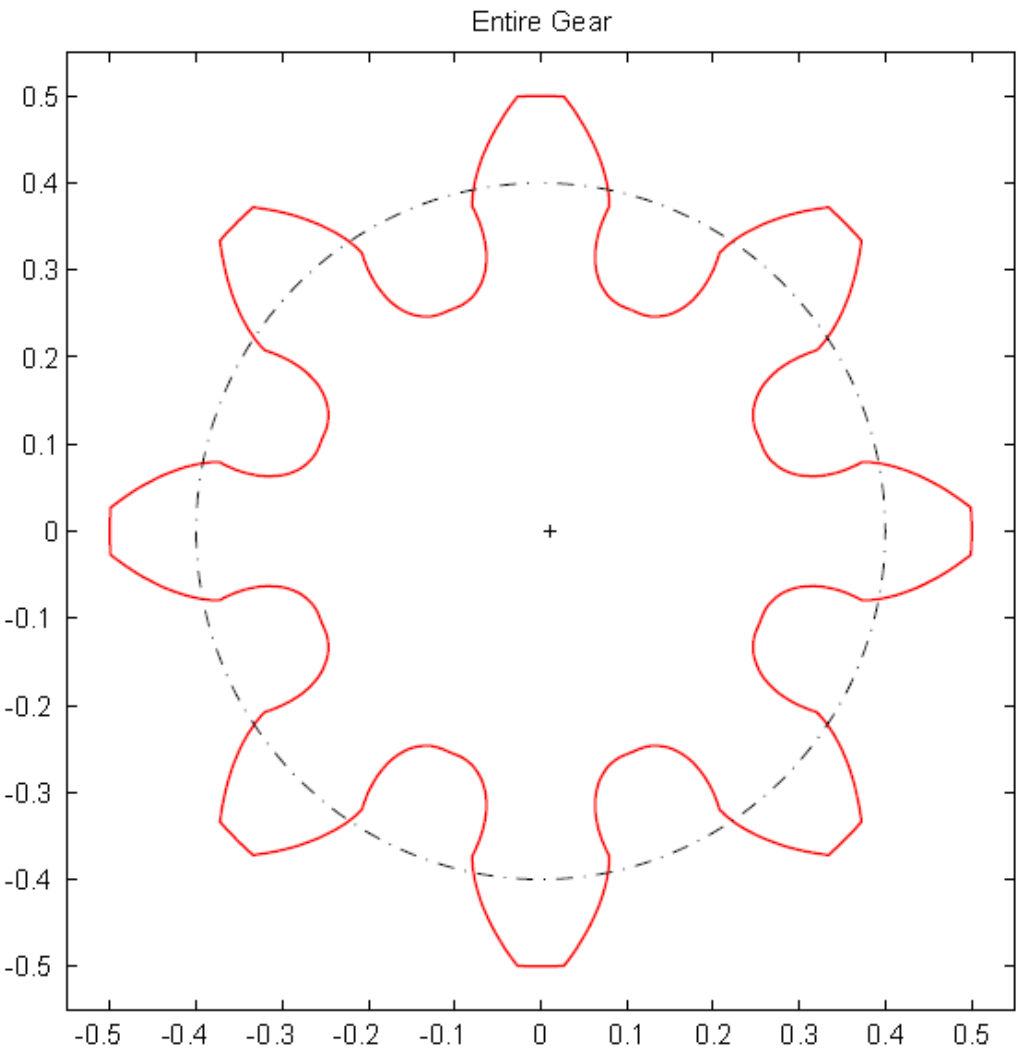
Drawing of half of rack tooth



آیا پروفیل درست است

Drawing of one tooth of gear

Drawing of entire gear



چند مثال دیگر

Program for Drawing Rack Envelope (*rackmotion.m)*

Conjugate Gear Tooth Generation Program ***arb2th.m***

مجموعه چرخدنده ها

از روشهای متعددی می توان جفت چرخدنده ها را ترکیب نمود و ارتباط ورودی/خروجی مورد نظر را بدست آورد.

انواع مجموعه چرخدنده هایی که در این فصل بررسی می شوند عبارتند از:

a) مجموعه چرخدنده های ساده Simple Gear Train
b) مجموعه چرخدنده های مرکب Compound Gear Train
c) مجموعه چرخدنده های خورشیدی Planetary Gear Train

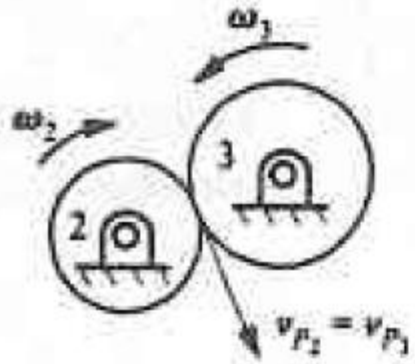
جهت دوران و نسبت سرعت

$$R = \pm\frac{\omega_2}{\omega_3} = \pm\frac{r_3}{r_2} = \pm\frac{N_3}{N_2}$$

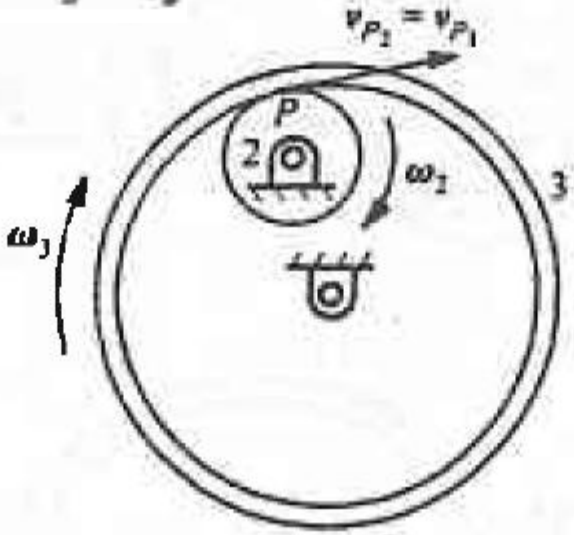
علامت مثبت برای تماس چرخدنده داخلی

وخارجی علامت منفی برای تما س خارجی

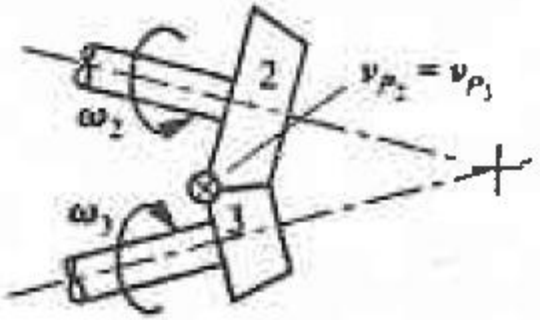
$$v_{P2} = v_{P3} = \omega_2 \times r_2 = \omega_3 \times r_3$$



External Gears



Internal Gears

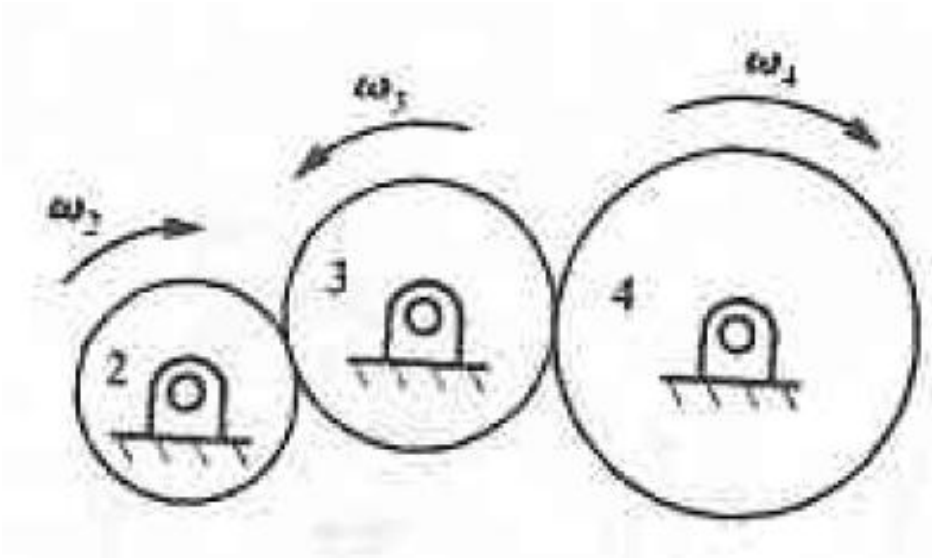


Bevel Gears

مجموعه چرخدنده های ساده

در این مجموعه محور چرخدنده ها ثابت می باشد

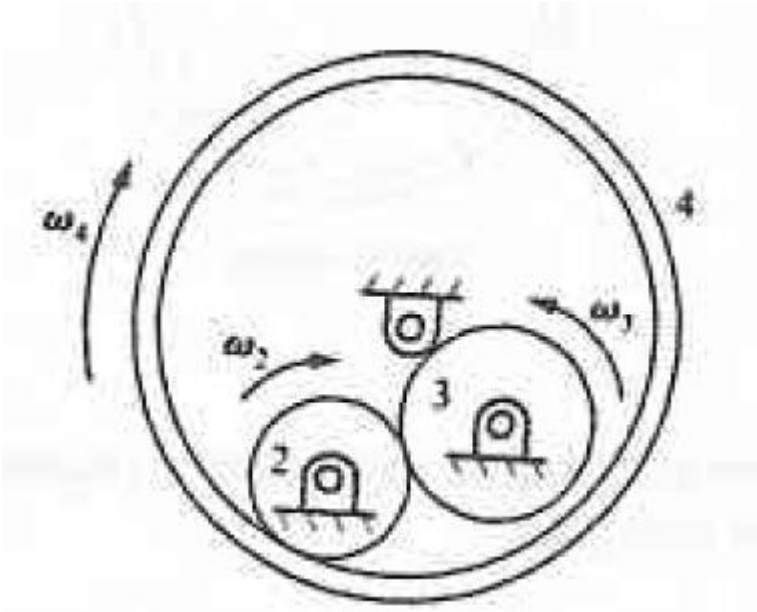
در مجموعه می تواند چرخدنده هرزگرد وجود داشته باشد که برای تغییر جهت دوران و یا به عنوان Spacer استفاده می شود.



$$\frac{\omega_2}{\omega_3} = -\frac{N_3}{N_2} \quad \frac{\omega_3}{\omega_4} = -\frac{N_4}{N_3}$$

$$\frac{\omega_2}{\omega_3}\frac{\omega_3}{\omega_4} = \left(-\frac{N_3}{N_2}\right)\left(-\frac{N_4}{N_3}\right)$$

$$\frac{\omega_2}{\omega_4} = (-1)^2 \frac{N_4}{N_2}$$



$$\frac{\omega_2}{\omega_4} = (-1)^1 \frac{N_4}{N_2}$$

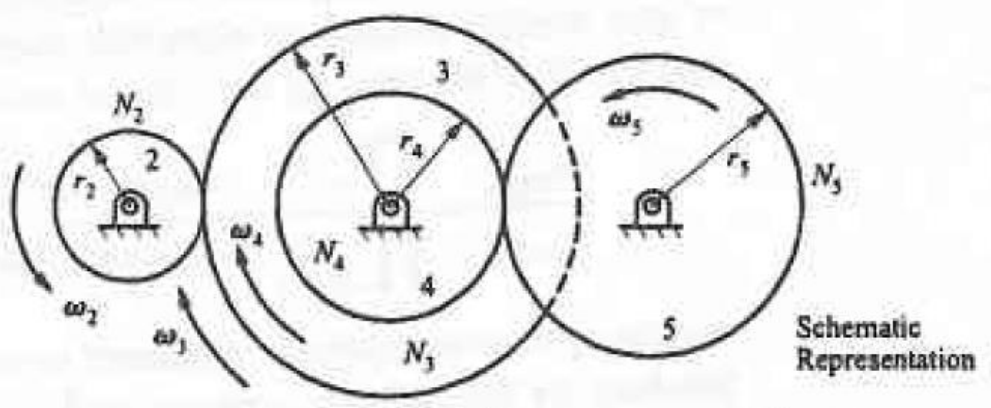
مجموعه چرخدنده های مرکب

نسبت سرعت در هر تماس محدودیت دارد ، مثلا برای چرخدنده ساده نباید از 1/5 تجاوز نماید. کاهش بیشتر توسط مجموعه چرخدنده های مرکب انجام می شود.

در این نوع مجموعه ها روی یک محور دو یا چند چرخدنده متصل است.

بر خلاف مجموعه های ساده ، چرخدنده ها در مجموعه مرکب می توانند مدول و یا نوع متفاوتی داشته باشند.

مجموعه چرخدنده مرکب



$$\frac{\omega_2}{\omega_3} = -\frac{N_3}{N_2}$$

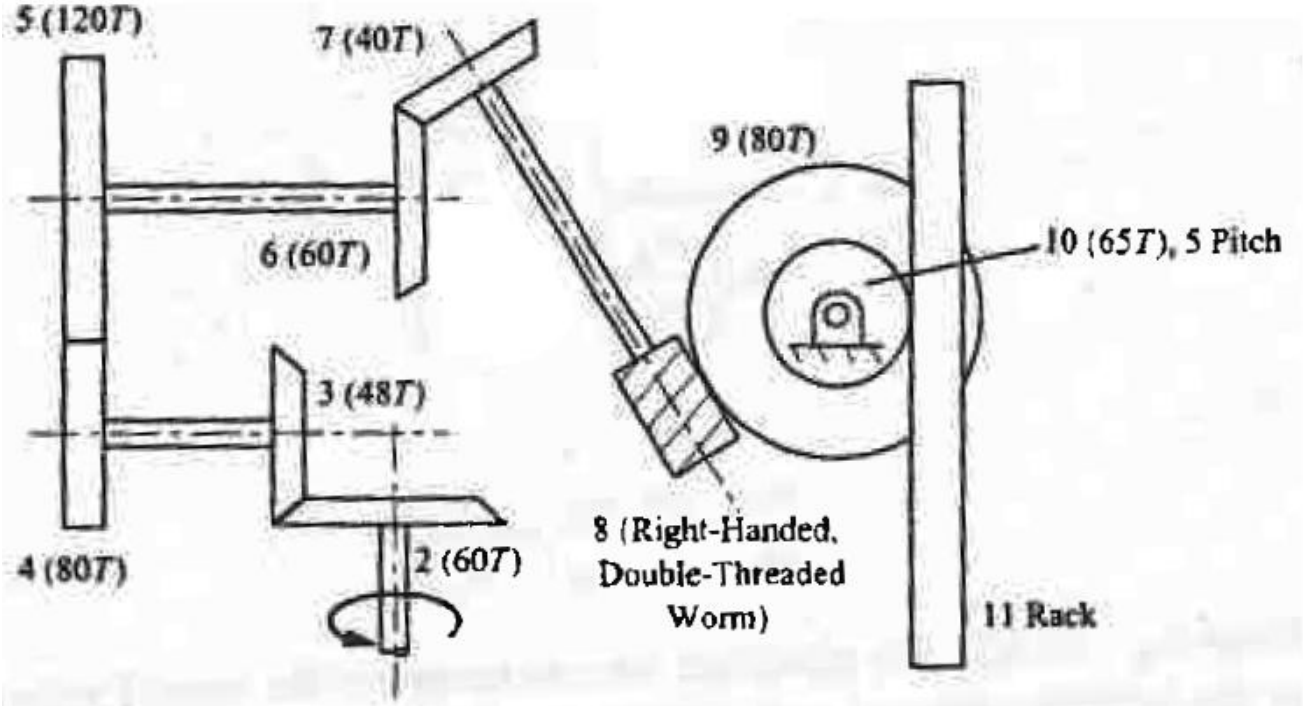
$$\frac{\omega_4}{\omega_5} = -\frac{N_5}{N_4}$$

$$\omega_3 = \omega_4$$

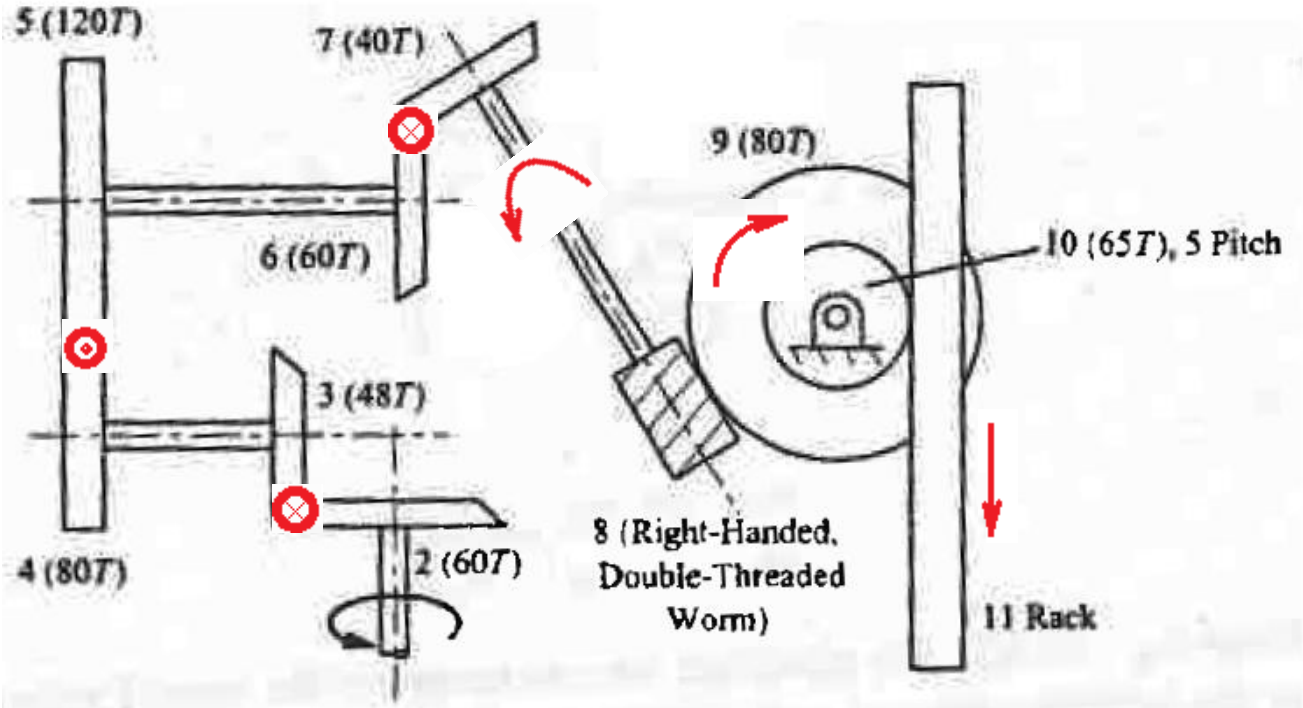
$$\frac{\omega_2}{\omega_5} = \frac{-\omega_3\left(\frac{N_3}{N_2}\right)}{-\omega_4\left(\frac{N_4}{N_5}\right)} = \frac{\left(\frac{N_3}{N_2}\right)}{\left(\frac{N_4}{N_5}\right)} = \frac{N_3 N_5}{N_2 N_4}$$

$$\frac{\omega_{\text{input}}}{\omega_{\text{output}}} = \frac{\prod_{i=3}^{n} N_i}{\prod_{j=3}^{n} N_j} = \frac{\text{product of driven tooth numbers}}{\text{product of driver tooth numbers}}$$

مثال: سرعت زاویه ای محور۲ (ورودی) (**rpm**) ۲۰۰ در جهت نشان داده شده می باشد. سرعت زاویه ای محور ۱۰ و سرعت خطی **rack** را بدست آورید.



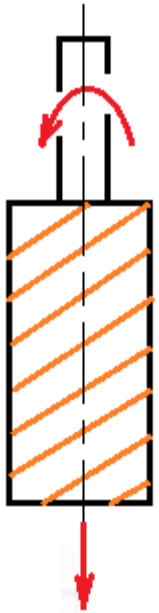
ابتدا جهت دوران هر محور را معین نمایید

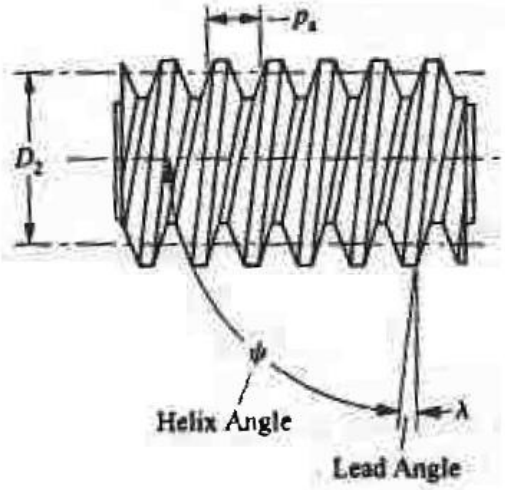


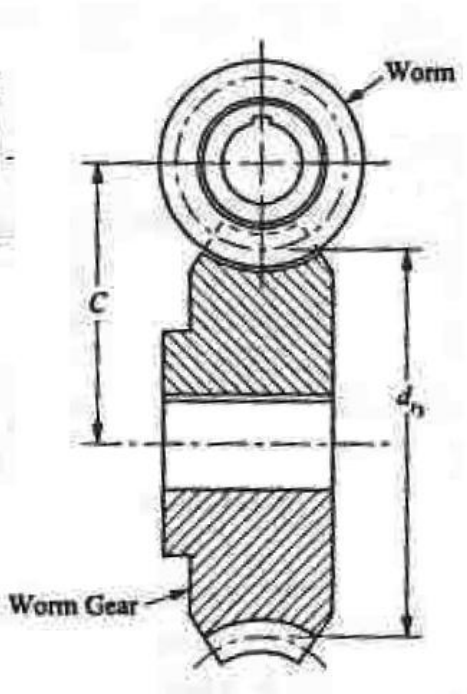
حلزون راستگرد دو راهه

- پیچ راستگرد

- در صورتی که پیچ حرکت محوری نداشته باشد ، جهت حرکت معکوس می شود.







نسبت سرعت بین چرخدنده ۹ و ۲

$$\frac{\omega_9}{\omega_2} = \frac{N_2}{N_3}\frac{N_4}{N_5}\frac{N_6}{N_7}\frac{N_8}{N_9}$$

$$\omega_9 = \omega_{10} = \omega_2 \frac{N_2}{N_3}\frac{N_4}{N_5}\frac{N_6}{N_7}\frac{N_8}{N_9}$$

$$\omega_9 = \omega_{10} = 200\frac{60}{48}\frac{80}{120}\frac{60}{40}\frac{2}{80} = 6.25 \text{ rpm}$$

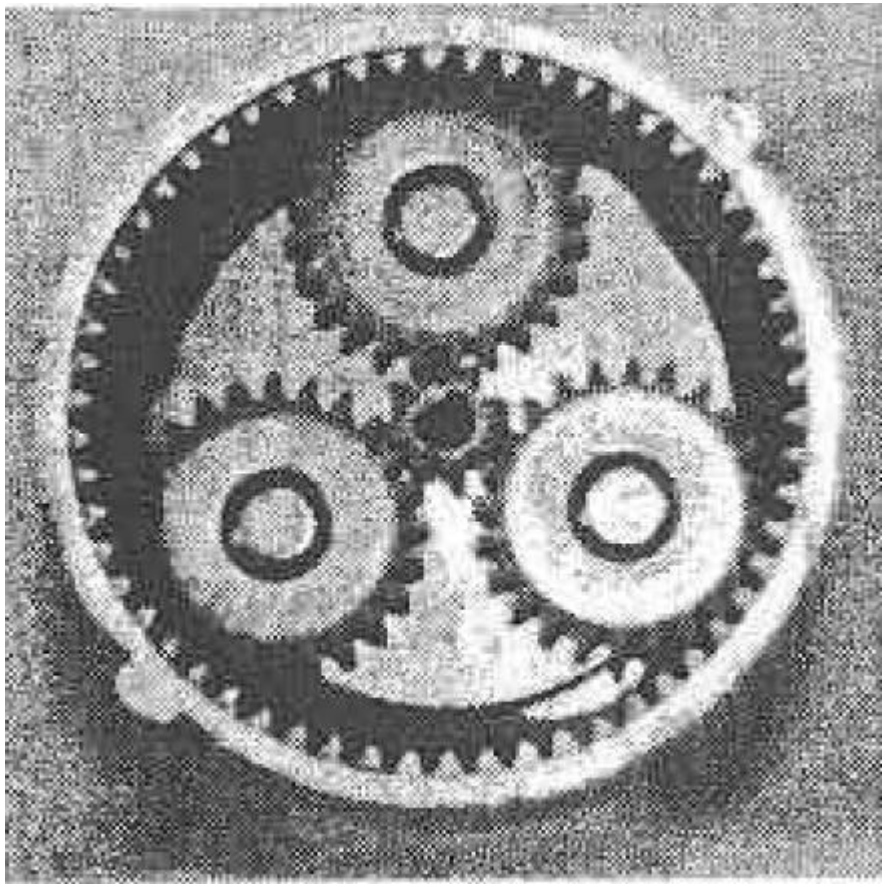
سزعت خطی (rack) برابر با سرعت خطی نقطه گام روی چرخدنده ۱۰ می باشد.

سرعت زاویه ای چرخدنده ۹ و ۱۰ برابر است

جهت حرکت rack را دوباره بررسی نمایید.

$$d_{10} = \frac{N_{10}}{P_{10}} = \frac{65}{5} = 13 \text{ in}$$

$$v = (\omega_{10})(d_{10}/2) = (6.25)(13/2)(2\pi/60) = 4.255 \text{ in/s}$$



مجموعه چرخدنده های خورشیدی

اجزاء این مجموعه عبارتند از:

۱) Sun Gear ثابت یا متحرک

۲) Planet Gear یک یا چند

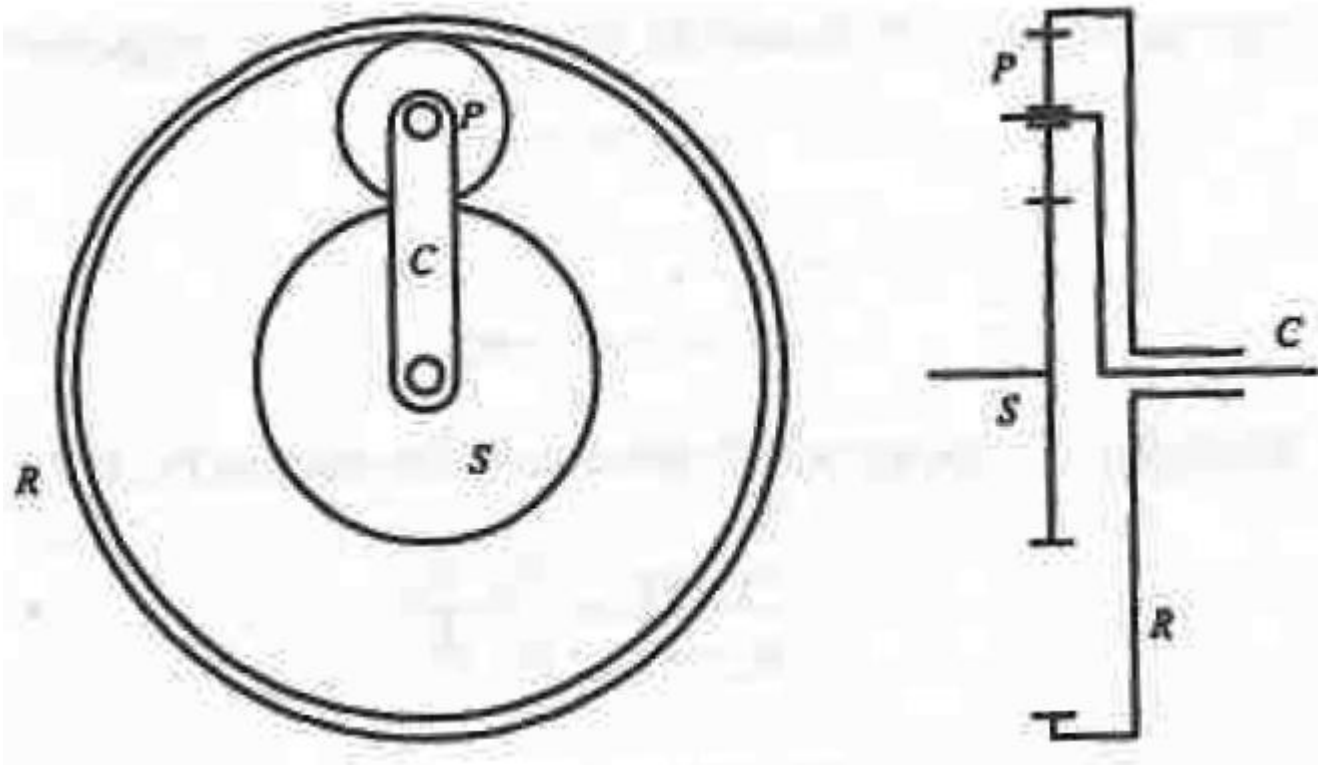
۳) Planet Carrier یا arm

۴) چرخدنده داخلی حلقه ای شکل

(همیشه استفاده نمی شود)

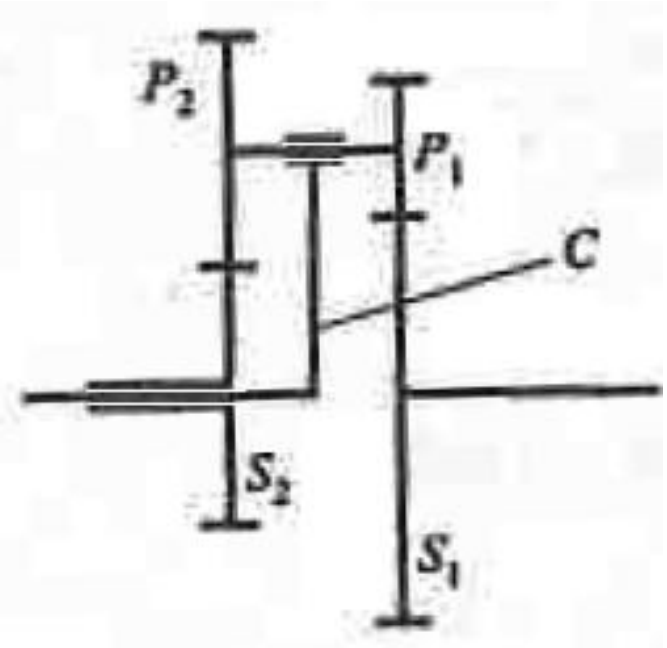
مجموعه چرخدنده خورشیدی ساده

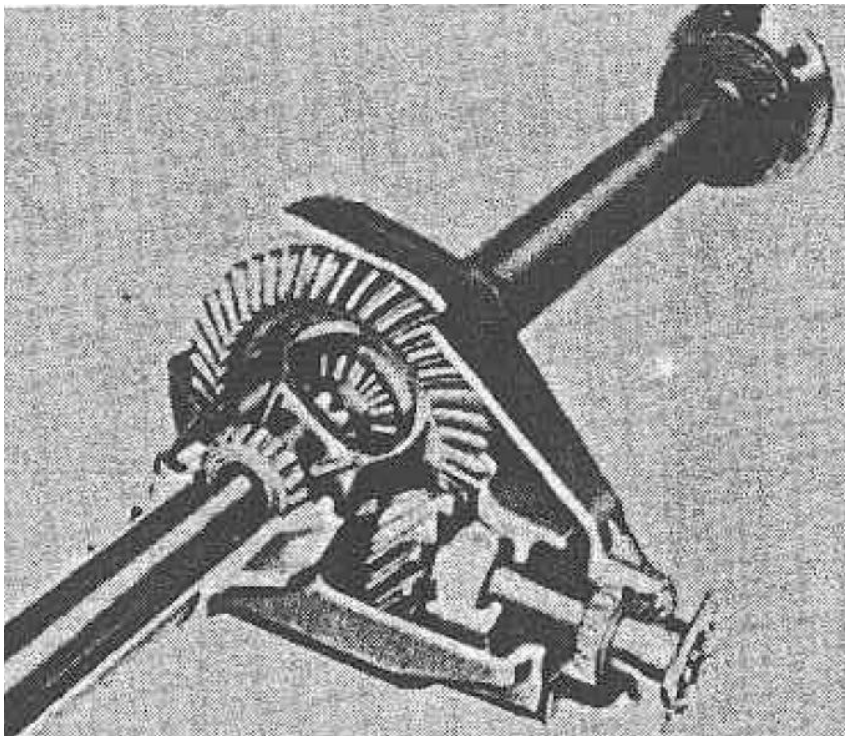
در سیستم سه محور وجود دارد لذا سیستم دارای دو درجه آزادی است



توسط مجموعه چرخدنده خورشیدی مرکب می توان نسبت کاهش شدید سرعت بدست آورد. در مثال زیر دو محور ورودی و یک محورخروجی وجود دارد.

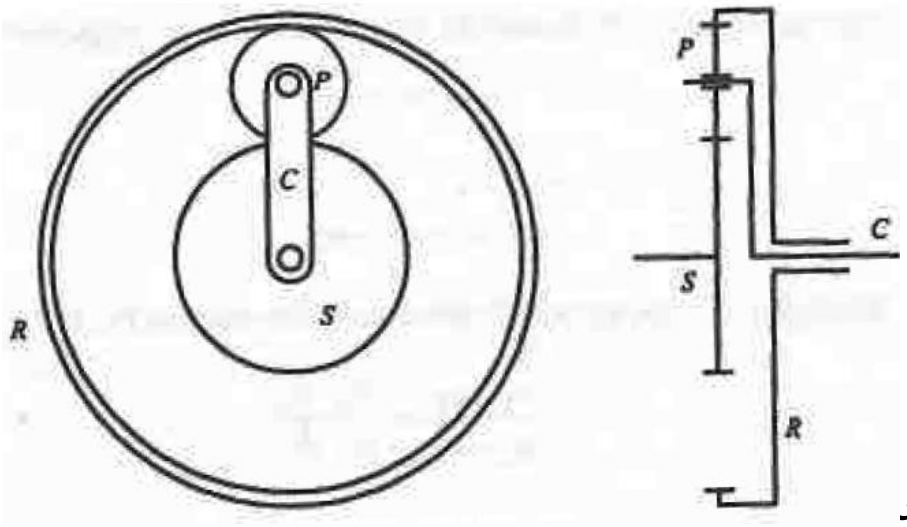
یکی از متداولترین موارد استفاده از چرخدنده خورشیدی دیفرانسیل خودرو می باشد.





تحلیل چرخدنده خورشیدی از دو روش معدله و جدول انجام می شود.

مثال: اگر چرخدنده ۲ ورودی باشد ، رابطه ای بین سرعت زاویه ۲ و ۴ و تعداد دندانه ها بدست آورید.



$$\omega_2 = {}^{C}\omega_2 + \omega_C$$

$$\omega_4 = {}^{C}\omega_4 + \omega_C$$

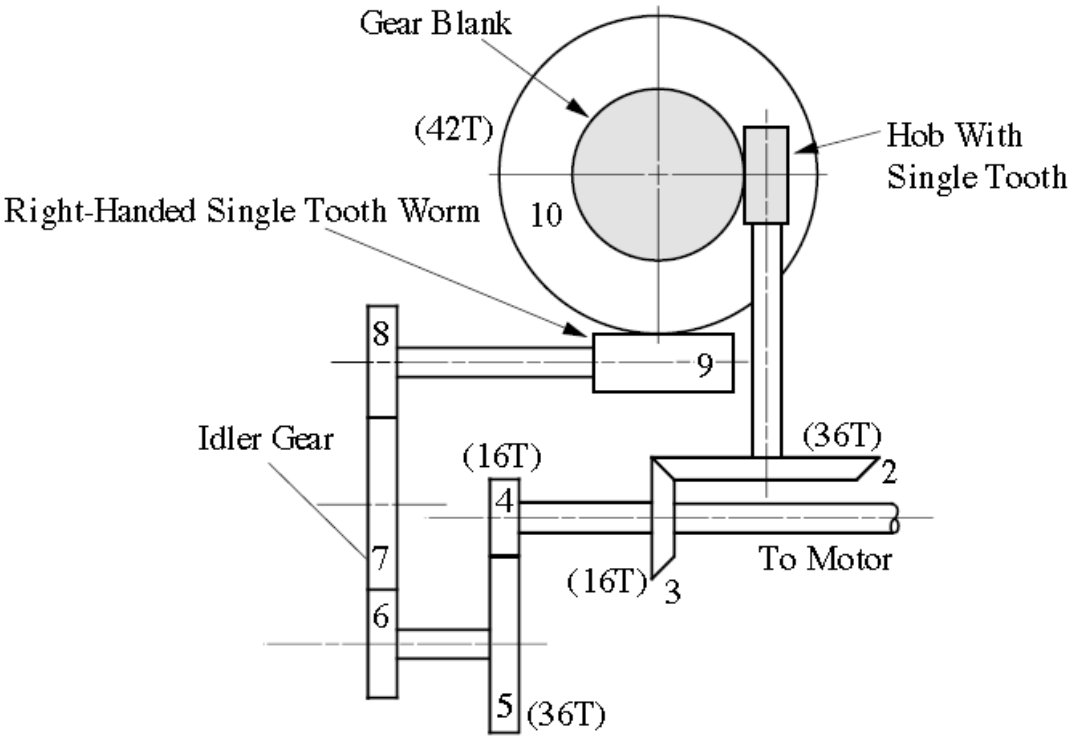
$$\frac{{}^{C}\omega_2}{{}^{C}\omega_4} = -\frac{N_4}{N_2}$$

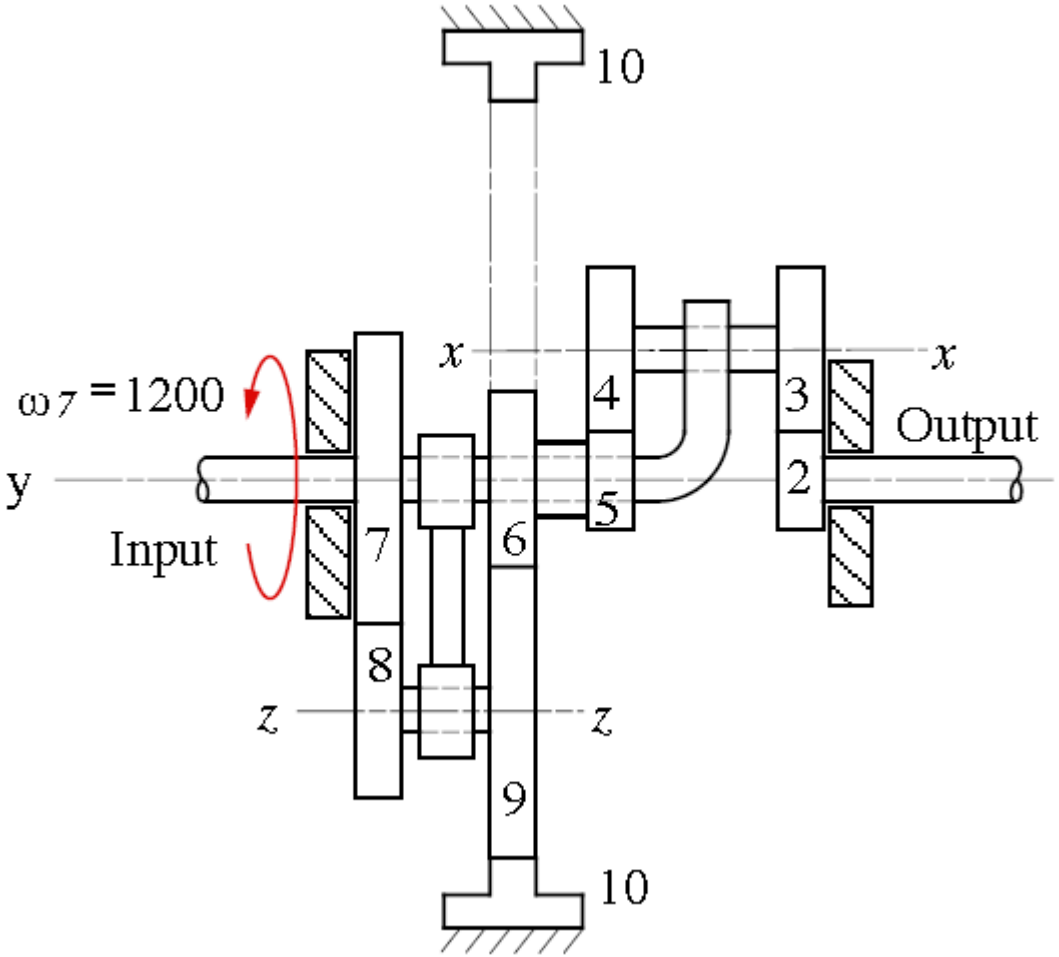
اگر arm ثابت باشد چرخدنده های معمولی بوده ، و چرخدنده سیاره ای به صورت هرزگرد عمل می کند این معادله ارتباط بین سرعتهای محور های ۲ ، ۴ و C را معین می سازد.

$$\frac{\omega_2 - \omega_C}{\omega_4 - \omega_C} = -\frac{N_4}{N_2}$$

مسائل

۱- مجموعه چرخدنده نشان داده شده در شکل برای دستگاه Hob انتخاب شده است. قطعه خام و چرخ حلزون (۱۰) روی یک محور نصب شده و با هم دوران می کنند. اگر قطعه خام ساعتگرد دوران کنند ابزار Hob راستگرد است یا چپگرد؟ در صورتیکه روی قطعه خام ۷۲ دندانه مورد نظر باشد ، نسبت ω_8/ω_6 را بدست آورید.

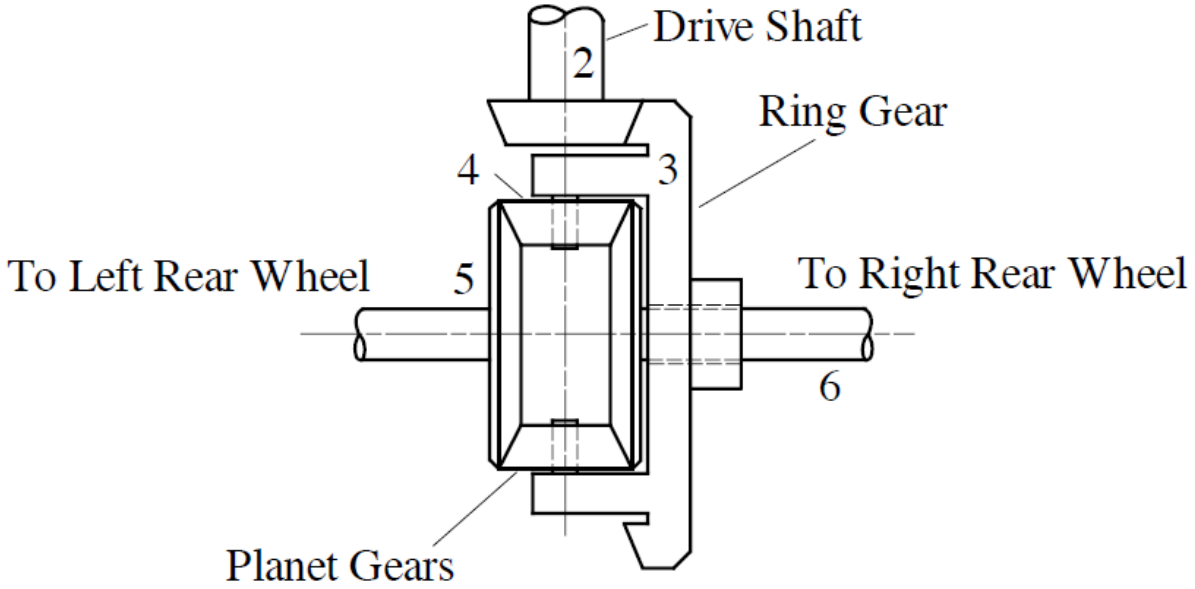




۲- در شکل محور y-y ثابت ، در حالیکه محورهای x-x و z-z با بازو حرکت می کنند. چرخدنده ۷ به بازو ثابت شده است. چرخدنده های ۳ و۴ ، ۵و۶ ، ۷و۸ ، نسبت بهم صلب می باشند. چرخدنده های ۳و ۴ سیاره ای حرکت می کنند. سرعت و جهت دوران محور خروجی را بدست آورید.

N2 = 16T, N3 = 20T, N4 = 22T,
N5 = 14T, N6= 15T, *N7 = 36T,*
N8 = 20T, N9 = 41T, N10 = 97T,

۳- در شکل دیفرانسیل یک خودرو محور عقب نشان داده شده است. قطر چرخ خودرو ۶۰۹/۶ می باشد. اگر سرعت زاویه محور محرک 900 rpm باشد و هیچیک از چرخها لغزشی نداشته باشند ، سرعت خورو را بدست آورید.



$N_2 = 28T$
$N_3 = 92T$
$N_4 = 22T$
$N_5 = 30T$
$N_6 = 30T$

۴- در مسئله فوق در نظر بگیرید که چرخ سمت راست در روی یخ قرار گرفته و آزادانه دوران می کند. فرض نزدیک به واقع برای سرعت دورانی چرخ سمت چپ چه مقدار است ، چرا ؟ با این فرض سرعت دورانی چرخ سمت چپ چقدر است ؟ سرعت محور ورودی را 500 rpm در نظر بگیرید.

پایان