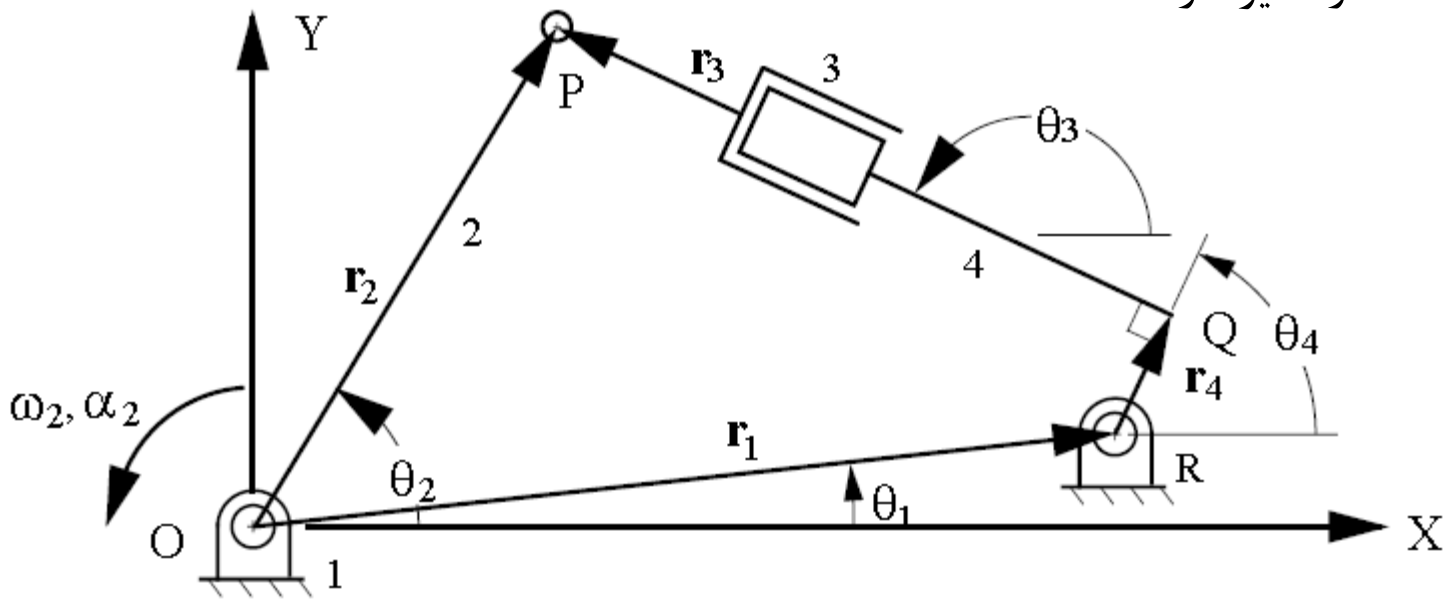
فصل ۷ تحلیل مکانیزمها

قسمت دوم

- حل تحلیل معادلات مکانیزم معکوس لغزنده و لنگ
  - بردارهای r_1 و r_2 مانند گذشته رسم شده اند
  - بردار r_3 طول جک را مشخص می کند
  - و بردار r_4 عمود بر آن رسم شده است.
  - حلقه و مسیر ۱ و ۲



- معادلات حلقه بسته

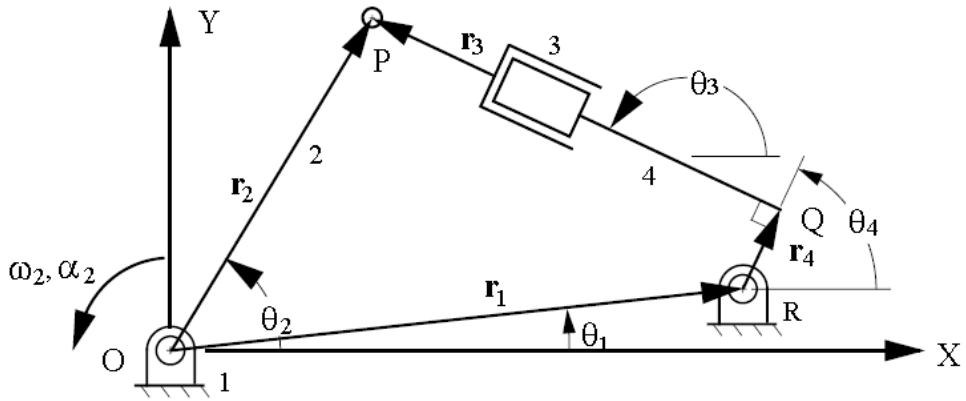
توجه نمایید که r_1 و r_2 و r_4 و θ_1 ثابت بوده و θ_4 متغیر جدیدی نمی باشد.

$$r_P = r_2 = r_1 + r_3 + r_4$$

$$\theta_4 = \theta_3 - \pi/2$$

$$r_2\cos\theta_2 = r_1\cos\theta_1 + r_3\cos\theta_3 + r_4\cos\theta_4$$

$$r_2\sin\theta_2 = r_1\sin\theta_1 + r_3\sin\theta_3 + r_4\sin\theta_4$$



ورودی		مجهولات
θ_2		r_3 , θ_3
θ_3		r_3 , θ_2
r_3		θ_2 , θ_3

- حل برای حالتی که θ_2 ورودی می باشد

$$r_2\cos\theta_2 - r_1\cos\theta_1 = r_3\cos\theta_3 + r_4\sin\theta_3$$

$$r_2\sin\theta_2 - r_1\sin\theta_1 = r_3\sin\theta_3 - r_4\cos\theta_3$$

$$r_3 = \sqrt{r_2^2 + r_1^2 - r_4^2 - 2r_1r_2\left(\cos\theta_1\cos\theta_2 + \sin\theta_1\sin\theta_2\right)}$$

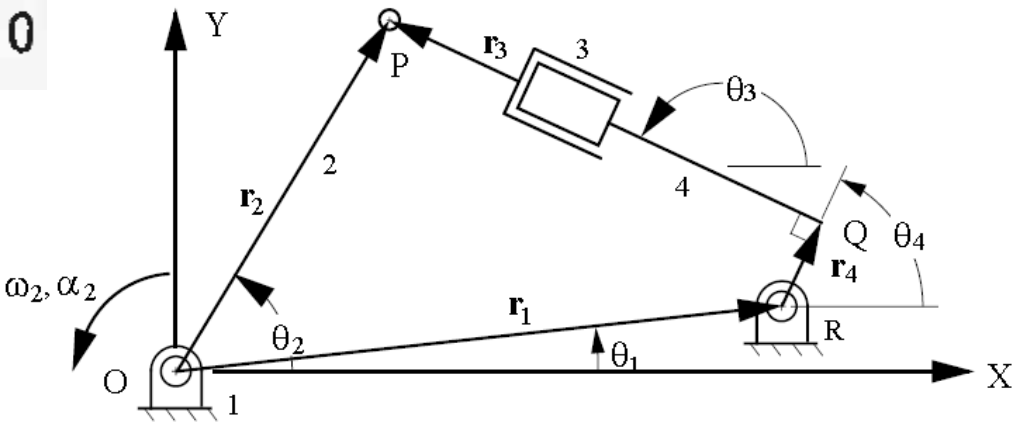
$$t = \tan\left(\frac{\theta_3}{2}\right)$$

حل θ_3

$$A\left(1+t^2\right) - r_3\left(1-t^2\right) - r_4\left(2t\right) = 0$$

$$A = r_2\cos\theta_2 - r_1\cos\theta_1$$

$$\left(A + r_3\right)t^2 - 2r_4t + \left(A - r_3\right) = 0$$



$$t = \frac{r_4 + \beta\sqrt{r_4^2 - A^2 + r_3^2}}{(A + r_3)}$$

$$\beta = \pm 1$$

معادله فوق دو ریشه دارد

با توجه به این که تنها یک حالت مونتاژ وجود دارد

مقدار صحیح β با جایگذاری θ_3 در هر یک از

معادلات زیر بدست می آید.

$$\theta_3 = 2\tan^{-1} t$$

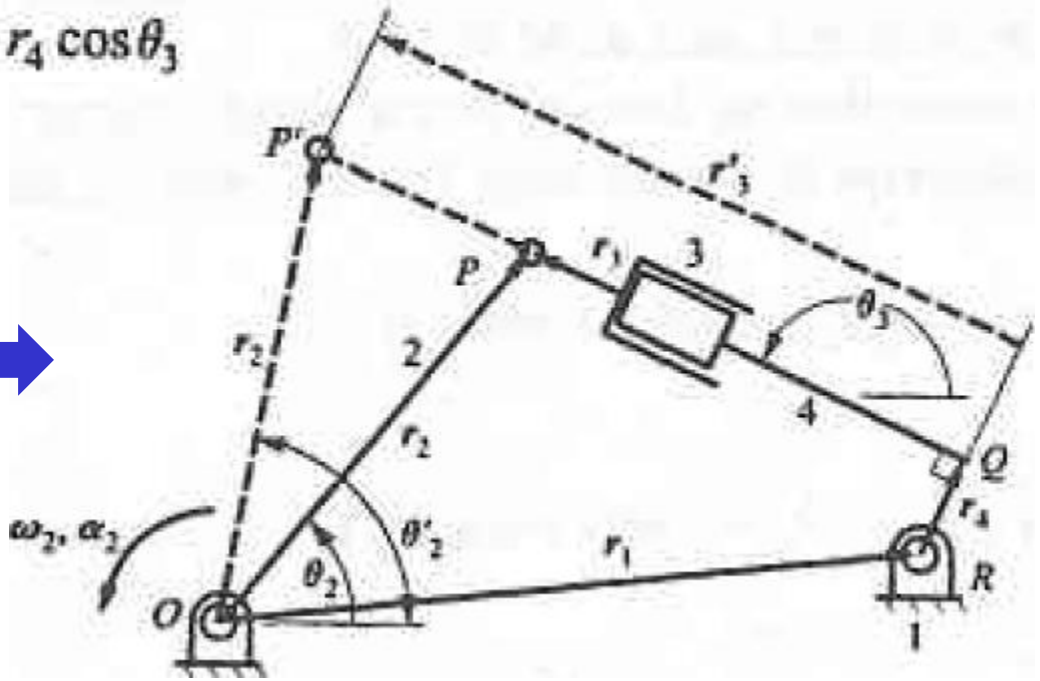
$$r_2\cos\theta_2 - r_1\cos\theta_1 = r_3\cos\theta_3 + r_4\sin\theta_3$$
$$r_2\sin\theta_2 - r_1\sin\theta_1 = r_3\sin\theta_3 - r_4\cos\theta_3$$

- حل برای حالتی که θ_3 ورودی می باشد

$$r_2\cos\theta_2 = r_1\cos\theta_1 + r_3\cos\theta_3 + r_4\sin\theta_3$$
$$r_2\sin\theta_2 = r_1\sin\theta_1 + r_3\sin\theta_3 - r_4\cos\theta_3$$

first for r_3 and then for θ_2

Two solutions



assembly positions

- حل برای حالتی که θ_3 ورودی می باشد

Position

$$r_3 = \frac{1}{2}\left[-B + \beta\sqrt{B^2 - 4C}\right]; \quad \beta = \pm 1$$

$$B = 2r_1\left(\cos\theta_1 \cos\theta_3 + \sin\theta_1 \sin\theta_3\right)$$

$$C = r_1^2 - r_2^2 + r_4^2 = 2r_1 r_4\left(\cos\theta_1 \sin\theta_3 - \sin\theta_1 \cos\theta_3\right)$$

$$\theta_2 = \tan^{-1}\left[\frac{r_1 \sin\theta_1 + r_3 \sin\theta_3 - r_4 \cos\theta_3}{r_1 \cos\theta_1 + r_3 \cos\theta_3 + r_4 \sin\theta_3}\right]$$

$$\theta_4 = \theta_3 - \pi/2$$

$$r_P = r_2 = r_2\left(\cos\theta_2 i + \sin\theta_2 j\right)$$

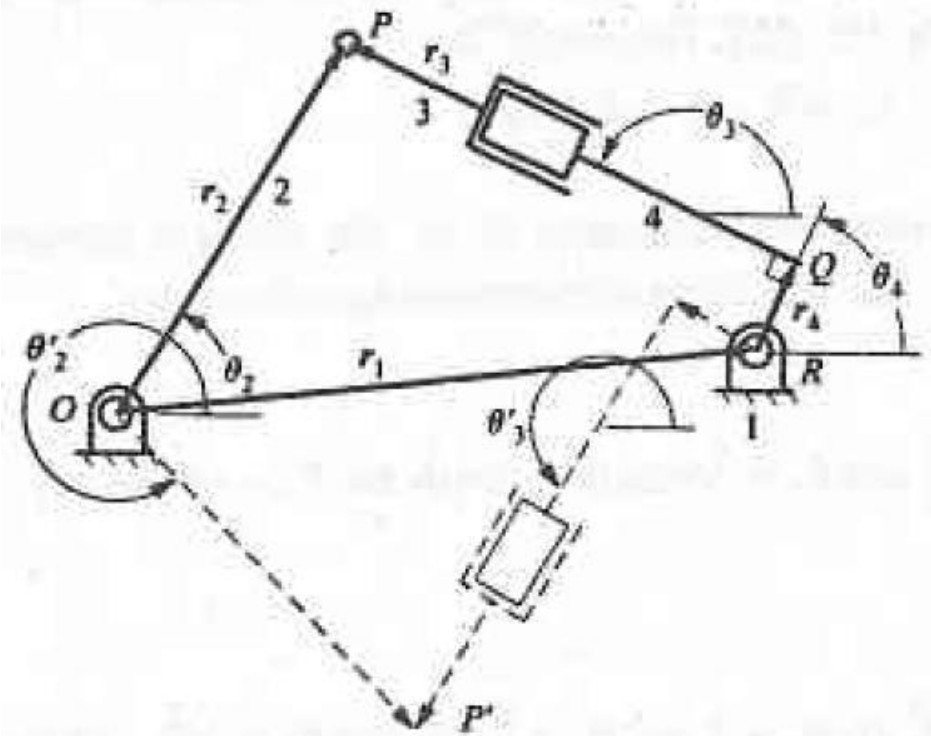
$$r_Q = r_1 + r_4 = r_1\left(\cos\theta_1 i + \sin\theta_1 j\right) + r_4\left(\cos\theta_4 i + \sin\theta_4 j\right)$$

- حل برای حالتی که r_3 ورودی می باشد

eliminate θ_3 from the component equations

solve for θ_2 and then for θ_3

two possible solutions



- حل برای حالتی که r_3 ورودی می باشد

Position

$$\left.\begin{aligned} A &= -2r_1r_2\cos\theta_1 \\ B &= -2r_1r_2\sin\theta_1 \\ C &= r_2^2 + r_1^2 - r_4^2 - r_3^2 \end{aligned}\right\}$$

$$\theta_2 = 2\tan^{-1}\left[\frac{-B+\beta\sqrt{B^2-C^2+A^2}}{C-A}\right]; \quad \beta = \pm 1$$

$$A = r_2\cos\theta_2 - r_1\cos\theta_1$$

$$\theta_3 = 2\tan^{-1}\left[\frac{r_4+\sigma\sqrt{r_4^2-A^2+r_3^2}}{(A+r_3)}\right]; \quad \sigma = \pm 1$$

σ is constant for a given linkage and is determined by the sign of angle PQR.

$$\theta_4 = \theta_3 - \pi/2$$

$$r_P = r_2 = r_2\left(\cos\theta_2 i + \sin\theta_2 j\right)$$

$$r_Q = r_1 + r_4 = r_1\left(\cos\theta_1 i + \sin\theta_1 j\right) + r_4\left(\cos\theta_4 i + \sin\theta_4 j\right)$$

- معادلات سرعت برای مکانیزم معکوس لغزنده و لنگ

$$\dot{r}_P = \dot{r}_2 = \dot{r}_1 + \dot{r}_4 + \dot{r}_3$$

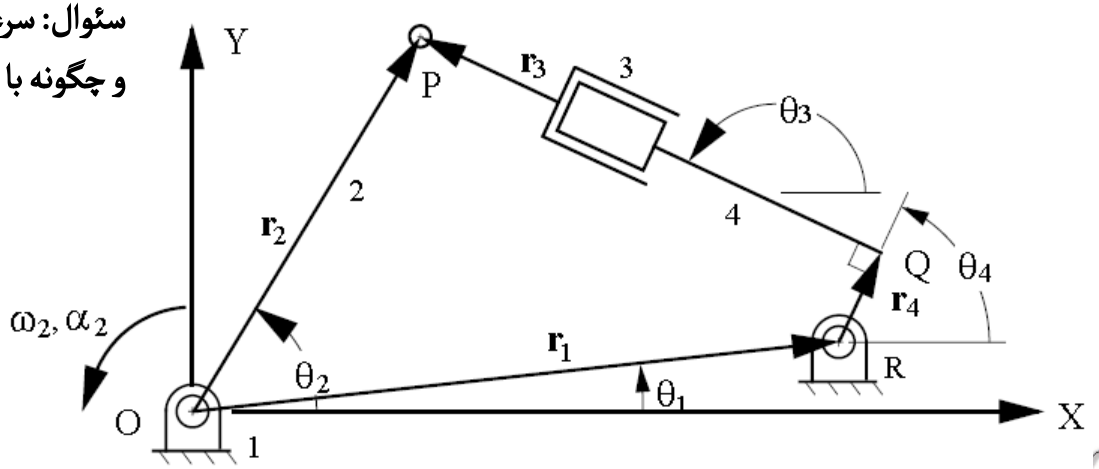
r_1, r_2, r_4, and θ_1 are constants

$$\dot{\theta}_3 = \dot{\theta}_4$$

$$-r_2\dot{\theta}_2 \sin\theta_2 = -r_3\dot{\theta}_3 \sin\theta_3 + \dot{r}_3 \cos\theta_3 + r_4\dot{\theta}_3 \sin\theta_4$$

$$r_2\dot{\theta}_2 \cos\theta_2 = r_3\dot{\theta}_3 \cos\theta_3 + \dot{r}_3 \sin\theta_3 + r_4\dot{\theta}_3 \cos\theta_4$$

سئوال: سرعت خطی جک چگونه محاسبه می شود و چگونه با دبی روغن ارتباط دارد؟



- معادلات سرعت برای مکانیزم معکوس لغزنده و لنگ

If $\dot{\theta}_2$ is input, then $\dot{r}_3$ and $\dot{\theta}_3$ will be unknown

$$\begin{bmatrix} \cos\theta_3 & -r_3\sin\theta_3 - r_4\sin\theta_4 \\ \sin\theta_3 & r_3\cos\theta_3 + r_4\cos\theta_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{r}_3 \\ \dot{\theta}_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -r_2\dot{\theta}_2\sin\theta_2 \\ r_2\dot{\theta}_2\cos\theta_2 \end{Bmatrix}$$

If $\dot{\theta}_3$ is input, then $\dot{r}_3$ and $\dot{\theta}_2$ will be unknown

$$\begin{bmatrix} -r_2\sin\theta_2 & -\cos\theta_3 \\ r_2\cos\theta_2 & -\sin\theta_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\theta}_2 \\ \dot{r}_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -r_3\dot{\theta}_3\sin\theta_3 - r_4\dot{\theta}_3\sin\theta_4 \\ r_3\dot{\theta}_3\cos\theta_3 + r_4\dot{\theta}_3\cos\theta_4 \end{Bmatrix}$$

If $\dot{r}_3$ is input, then $\dot{\theta}_2$ and $\dot{\theta}_3$ will be unknown

$$\begin{bmatrix} -r_2\sin\theta_2 & r_3\sin\theta_3 + r_4\sin\theta_4 \\ r_2\cos\theta_2 & -r_3\cos\theta_3 - r_4\cos\theta_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dot{r}_3\cos\theta_3 \\ \dot{r}_3\sin\theta_3 \end{Bmatrix}$$

- معادلات شتاب برای مکانیزم معکوس لغزنده و لنگ

$$\ddot{\vec{r}}_P = \ddot{\vec{r}}_2 = \ddot{\vec{r}}_1 + \ddot{\vec{r}}_3 + \ddot{\vec{r}}_4$$

$$-r_2\ddot{\theta}_2 \sin\theta_2 - r_2\dot{\theta}_2^2 \cos\theta_2 = -r_3\ddot{\theta}_3 \sin\theta_3 - r_3\dot{\theta}_3^2 \cos\theta_3 + \ddot{r}_3 \cos\theta_3 - 2\dot{r}_3\dot{\theta}_3 \sin\theta_3 - r_4\ddot{\theta}_4 \sin\theta_4 - r_4\dot{\theta}_4^2 \cos\theta_4$$

$$-r_2\ddot{\theta}_2 \cos\theta_2 - r_2\dot{\theta}_2^2 \sin\theta_2 = -r_3\ddot{\theta}_3 \cos\theta_3 - r_3\dot{\theta}_3^2 \sin\theta_3 + \ddot{r}_3 \sin\theta_3 + 2\dot{r}_3\dot{\theta}_3 \cos\theta_3 + r_4\ddot{\theta}_3 \cos\theta_4 - r_4\dot{\theta}_3^2 \sin\theta_4$$

If $\ddot{\theta}_2$ is input, then $\ddot{r}_3$ and $\ddot{\theta}_3$ will be unknown

$$\begin{bmatrix} \cos\theta_3 & -r_3 \sin\theta_3 - r_4 \sin\theta_4 \\ \sin\theta_3 & r_3 \cos\theta_3 + r_4 \cos\theta_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{r}_3 \\ \ddot{\theta}_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -r_2\ddot{\theta}_2 \sin\theta_2 - r_2\dot{\theta}_2^2 \cos\theta_2 + r_3\dot{\theta}_3^2 \cos\theta_3 + 2\dot{r}_3\dot{\theta}_3 \sin\theta_3 + r_4\dot{\theta}_3^2 \cos\theta_4 \\ r_2\ddot{\theta}_2 \cos\theta_2 - r_2\dot{\theta}_2^2 \sin\theta_2 + r_3\dot{\theta}_3^2 \sin\theta_3 - 2\dot{r}_3\dot{\theta}_3 \cos\theta_3 + r_4\dot{\theta}_3^2 \sin\theta_4 \end{Bmatrix}$$

- معادلات شتاب برای مکانیزم معکوس لغزنده و لنگ

If $\ddot{\theta}_3$ is input, then $\ddot{r}_3$ and $\ddot{\theta}_2$ will be unknown

$$\begin{bmatrix} -r_2\sin\theta_2 & -\cos\theta_3 \\ r_2\cos\theta_2 & -\sin\theta_3 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{\theta}_2 \\ \ddot{r}_3 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} r_2\dot{\theta}_2^2\cos\theta_2 - r_3\ddot{\theta}_3\sin\theta_3 - r_3\dot{\theta}_3^2\cos\theta_3 - 2\dot{r}_3\dot{\theta}_3\sin\theta_3 - r_4\ddot{\theta}_3\sin\theta_4 - r_4\dot{\theta}_3^2\cos\theta_4 \\ r_2\dot{\theta}_2^2\sin\theta_2 + r_3\ddot{\theta}_3\cos\theta_3 - r_3\dot{\theta}_3^2\sin\theta_3 + 2\dot{r}_3\dot{\theta}_3\cos\theta_3 + r_4\ddot{\theta}_3\cos\theta_4 - r_4\dot{\theta}_3^2\sin\theta_4 \end{Bmatrix}$$

If $\ddot{r}_3$ is input, then $\ddot{\theta}_2$ and $\ddot{\theta}_3$ will be unknown

$$\begin{bmatrix} -r_2\sin\theta_2 & r_3\sin\theta_3 + r_4\sin\theta_4 \\ r_2\cos\theta_2 & -r_3\cos\theta_3 - r_4\cos\theta_4 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{\theta}_2 \\ \ddot{\theta}_3 \end{Bmatrix}$$

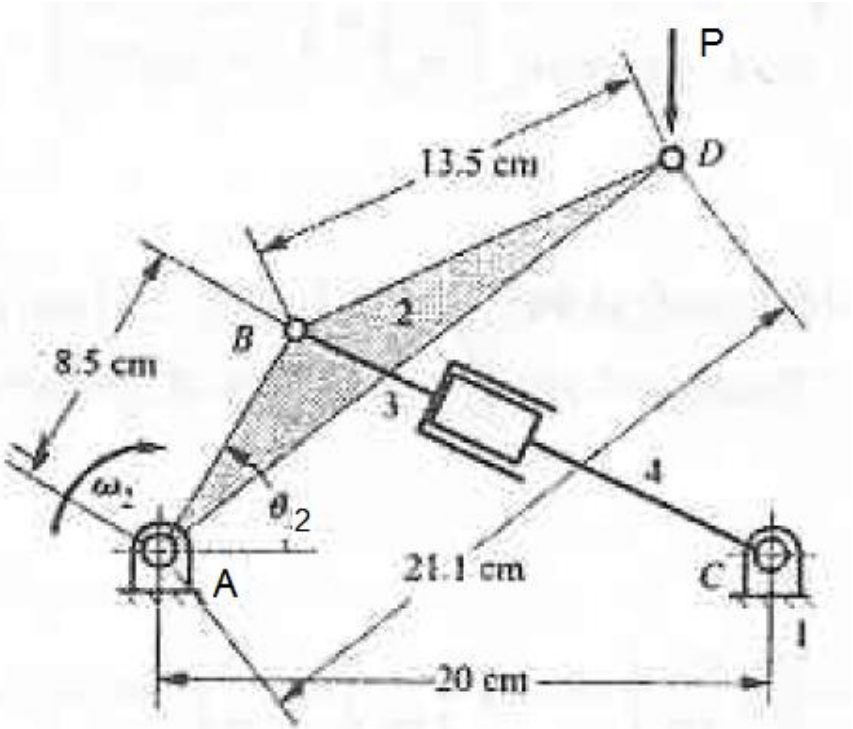
$$= \begin{Bmatrix} r_2\dot{\theta}_2^2\cos\theta_2 - r_3\dot{\theta}_3^2\cos\theta_3 - 2\dot{r}_3\dot{\theta}_3\sin\theta_3 + \ddot{r}_3\cos\theta_3 - r_4\dot{\theta}_3^2\cos\theta_4 \\ r_2\dot{\theta}_2^2\sin\theta_2 - r_3\dot{\theta}_3^2\sin\theta_3 + 2\dot{r}_3\dot{\theta}_3\cos\theta_3 + \ddot{r}_3\sin\theta_3 - r_4\dot{\theta}_3^2\sin\theta_4 \end{Bmatrix}$$

مثال: جک پایی که در شکل نشان داده شده ،

مجموع طول بازو های ۳ و ۴ ، سرعت و شتاب زاویه ای بازو های ۳ و ۴ و سرعت و شتاب خطی نقطه B از ناظر عضو ۳ را محاسبه نمایید.

$(\theta_2 = 60°)$

$\dot{\theta}_2 = 2.5$ rad/s CW constant



$r_1 = 20\ \text{cm}, \quad \theta_1 = 0$

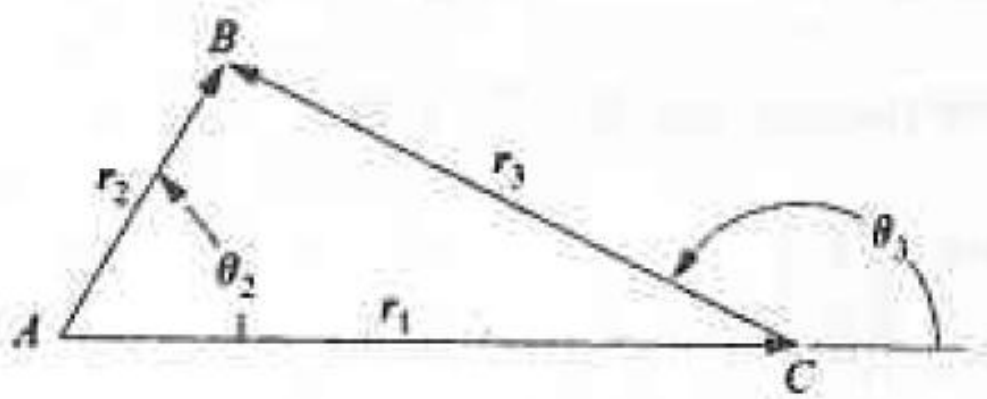
$r_2 = 8.5\ \text{cm}, \quad \theta_2 = 60^\circ, \quad \dot{\theta}_2 = -2.5\ \text{rad/s}, \quad \ddot{\theta}_2 = 0,$

$r_4 = 0, \quad \theta_4 = 60, \quad \dot{\theta}_4 = 0, \quad \ddot{\theta}_4 = 0,$

unknown: $r_3, \theta_3, \dot{\theta}_3$, and $\ddot{\theta}_3$

$$r_3 = \sqrt{r_2^2 + r_1^2 - r_4^2 - 2r_1r_2\left(\cos\theta_1\cos\theta_2 + \sin\theta_1\sin\theta_2\right)}$$

$$= \sqrt{8.5^2 + 20^2 - 2(20)(8.5)\cos(60^\circ)} = \sqrt{302.2} = 17.38\ \text{cm}$$



دیاگرام سینماتیکی و بردار حلقه بسته

$$A = r_2 \cos\theta_2 - r_1 \cos\theta_1 = 8.5\cos(60^\circ) - 20 = -15.75 \text{ cm}$$

$$\theta_3 = 2\tan^{-1}\left[\frac{r_4 + \beta\sqrt{r_4^2 - A^2 + r_3^2}}{(A + r_3)}\right] = 2\tan^{-1}\left[\frac{\beta\sqrt{-(-15.75)^2 + (17.38)^2}}{(-15.75 + 17.38)}\right]$$

$$= 2\tan^{-1}\left[\frac{\beta(7.3486)}{(1.63)}\right] = \pm 154.98^\circ$$

To determine θ_3, we need to specify β

For this problem, $\beta = +1$

velocity analysis

$$\begin{bmatrix} \cos\theta_3 & -r_3\sin\theta_3 - r_4\sin\theta_4 \\ \sin\theta_3 & r_3\cos\theta_3 + r_4\cos\theta_4 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \dot{r}_3 \\ \dot{\theta}_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -r_2\dot{\theta}_2\sin\theta_2 \\ r_2\dot{\theta}_2\cos\theta_2 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \cos(154.99) & -17.38\sin(154.99) \\ \sin(154.99) & 17.38\cos(154.99) \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \dot{r}_3 \\ \dot{\theta}_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -8.5(-2.5)\sin(60^\circ) \\ 8.5(-2.5)\cos(60^\circ) \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -0.9059 & -7.3612 \\ 0.4234 & -15.750 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \dot{r}_3 \\ \dot{\theta}_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 18.403 \\ -10.625 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} \dot{r}_3 \\ \dot{\theta}_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -21.171 \text{ cm/s} \\ 0.1055 \text{ rad/s}^2 \end{Bmatrix}$$

acceleration analysis

$$\begin{bmatrix} \cos\theta_3 & -r_3\sin\theta_3 - r_4\sin\theta_4 \\ \sin\theta_3 & r_3\cos\theta_3 + r_4\cos\theta_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{r}_3 \\ \ddot{\theta}_3 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} -r_2\ddot{\theta}_2\sin\theta_2 - r_2\dot{\theta}_2^2\cos\theta_2 + r_3\dot{\theta}_3^2\cos\theta_3 + 2\dot{r}_3\dot{\theta}_3\sin\theta_3 + r_4\dot{\theta}_3^2\cos\theta_4 \\ r_2\ddot{\theta}_2\cos\theta_2 - r_2\dot{\theta}_2^2\sin\theta_2 + r_3\dot{\theta}_3^2\sin\theta_3 - 2\dot{r}_3\dot{\theta}_3\cos\theta_3 + r_4\dot{\theta}_3^2\sin\theta_4 \end{Bmatrix}$$

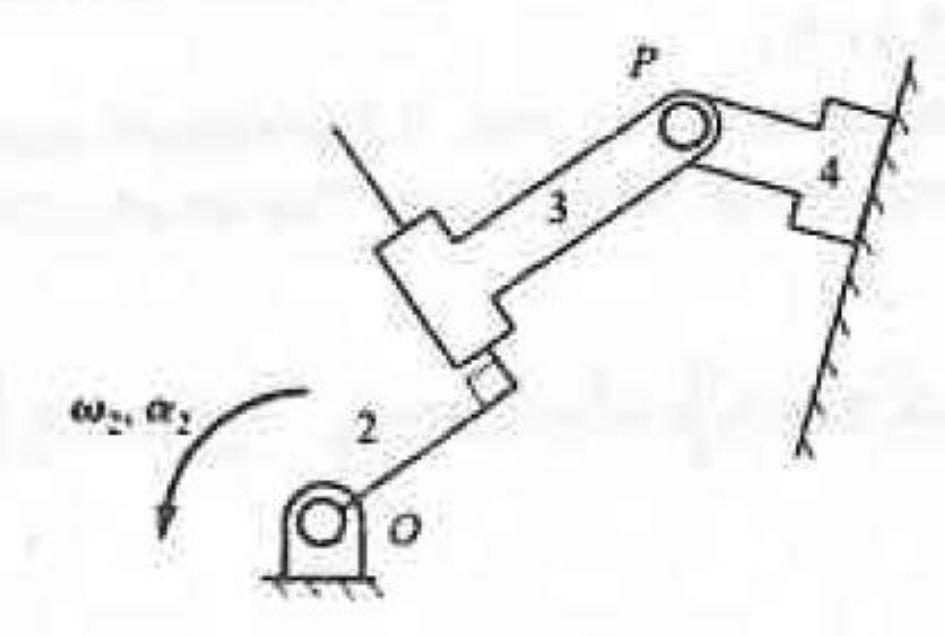
$$\begin{bmatrix} -0.9059 & -7.3612 \\ 0.4234 & -15.750 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{r}_3 \\ \ddot{\theta}_3 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} -(8.5)(-2.5)^2\cos(60^\circ) + 17.38(0.1055)^2\cos(154.99^\circ) + 2(-21.171)(0.1055)\sin(154.99^\circ) \\ -(8.5)(-2.5)^2\sin(60^\circ) + 17.38(0.1055)^2\sin(154.99^\circ) + 2(-21.171)(0.1055)\cos(154.99^\circ) \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} -25.1851 \\ -42.6038 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} \ddot{r}_3 \\ \ddot{\theta}_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 4.777 \ \text{cm/s}^2 \\ 2.833 \ \text{rad/s}^2 \end{Bmatrix}$$

بحث روی نتایج

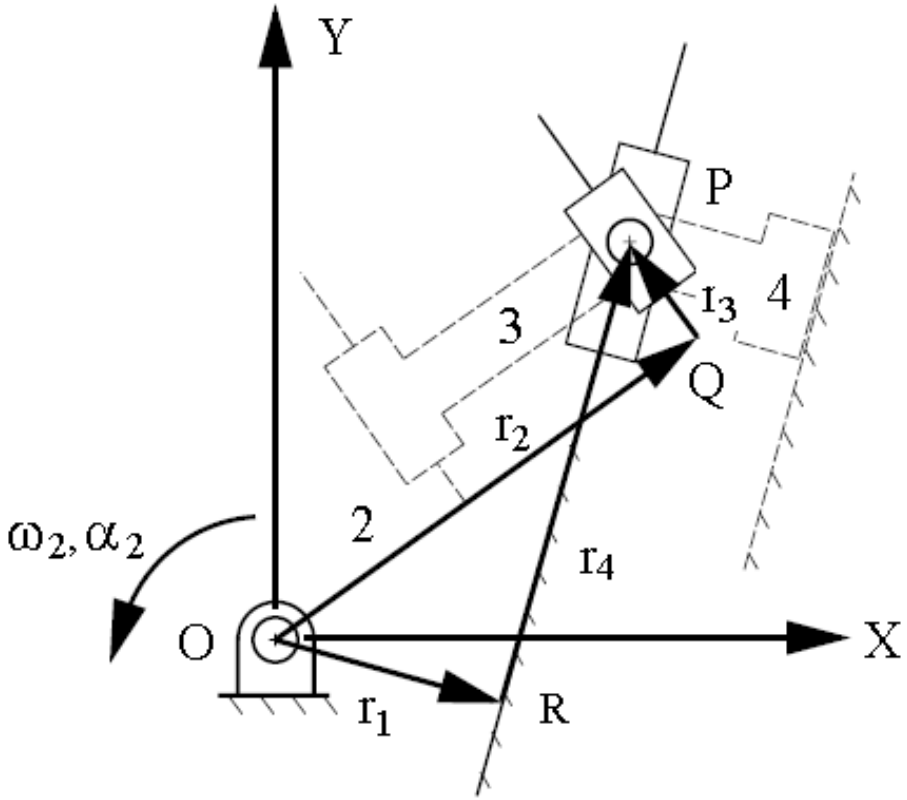
تحلیل مکانیزم RPRP



a less common mechanism than the various four-bar linkages and slider cranks

Rapson slide, is used in marine steering gear

- وقتی بین دو بازو اتصال لغزشی وجود دارد ، موقعیت سطح لغزش از نظر سینماتیکی مهم نیست.
- به عبارت دیگر می توان سطح لغزش را به موازات راستای لغزش جابجا نمود.



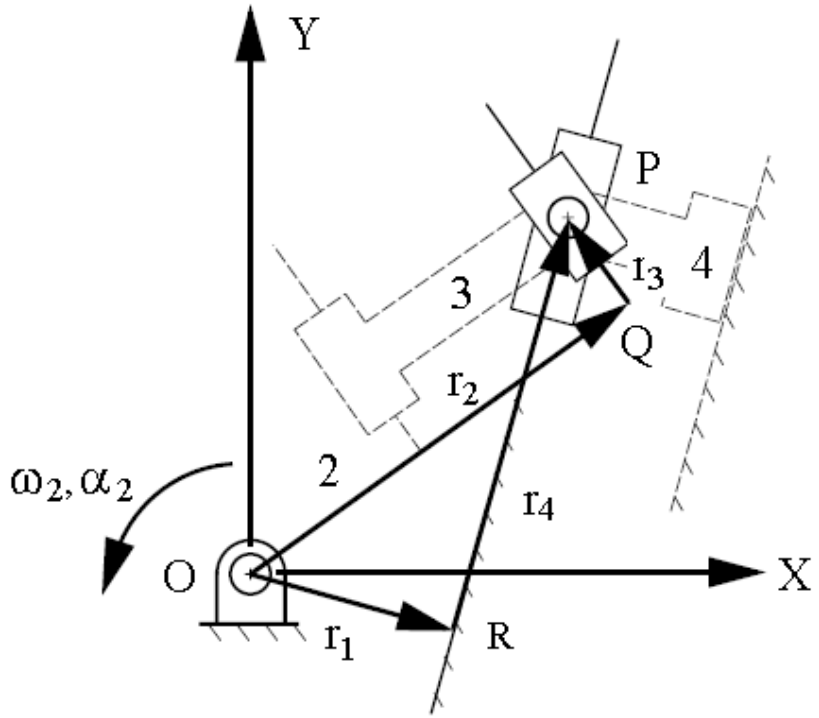
$$r_P = r_2 + r_3 = r_1 + r_4$$

معادلات حلقه بسته

- معادلات حلقه بسته

a- $r_2\cos\theta_2 + r_3\cos\theta_3 = r_1\cos\theta_1 + r_4\cos\theta_4$

b- $r_2\sin\theta_2 + r_3\sin\theta_3 = r_1\sin\theta_1 + r_4\sin\theta_4$



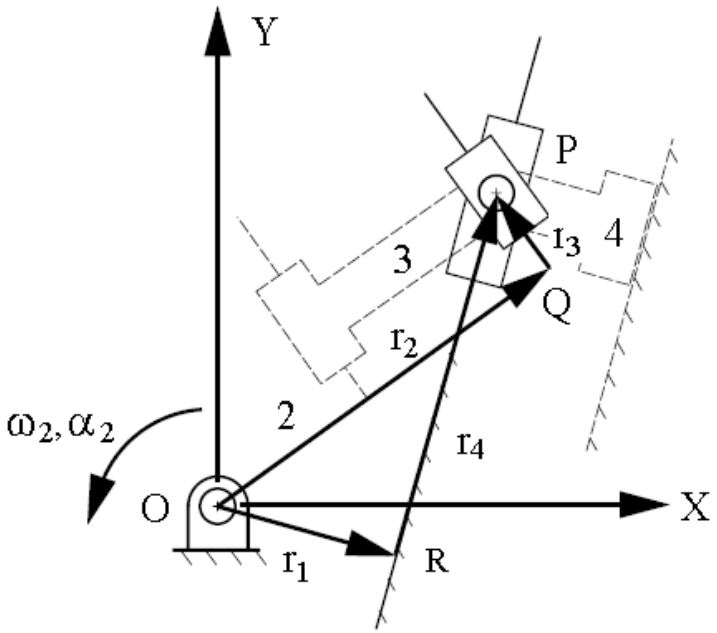
constants: r_1, θ_1, r_2, and θ_4

c- $\theta_3 = \theta_2 + \pi/2$

variables are r_3, θ_2, r_4, and θ_3

Equations are a, b, c.

- حل برای حالتی که θ_2 ورودی باشد



$$r_3\cos\theta_3 - r_4\cos\theta_4 = r_1\cos\theta_1 - r_2\cos\theta_2$$

$$r_3\sin\theta_3 - r_4\sin\theta_4 = r_1\sin\theta_1 - r_2\sin\theta_2$$

$$\begin{bmatrix}\cos\theta_3 & -\cos\theta_4\\ \sin\theta_3 & -\sin\theta_4\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}r_3\\ r_4\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}r_1\cos\theta_1 - r_2\cos\theta_2\\ r_1\sin\theta_1 - r_2\sin\theta_2\end{Bmatrix}$$

ورودی θ_2

Position

$$\theta_3 = \theta_2 + \pi/2$$

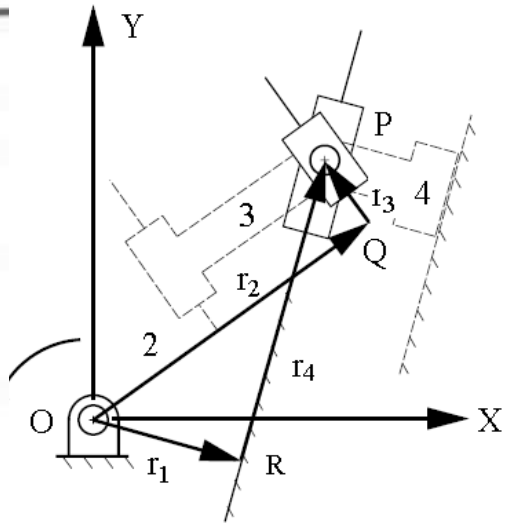
$$\theta_4 = \theta_1 + \pi/2$$

$$\begin{bmatrix} \cos\theta_3 & -\cos\theta_4 \\ \sin\theta_3 & -\sin\theta_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} r_3 \\ r_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} r_1\cos\theta_1 - r_2\cos\theta_2 \\ r_1\sin\theta_1 - r_2\sin\theta_2 \end{Bmatrix}$$

$$r_P = r_2 + r_3 = (r_2\cos\theta_2 + r_3\cos\theta_3)i + (r_2\sin\theta_2 + r_3\sin\theta_3)j$$
$$= r_1 + r_4 = (r_1\cos\theta_1 + r_4\cos\theta_4)i + (r_1\sin\theta_1 + r_4\sin\theta_4)j$$

$$r_Q = r_2 = (r_2\cos\theta_2)i + (r_2\sin\theta_2)j$$

$$r_R = r_1 = (r_1\cos\theta_1)i + (r_1\sin\theta_1)j$$



حل سرعت و شتاب

Velocity

$$\dot{\theta}_3 = \dot{\theta}_2$$

$$\begin{bmatrix} \cos\theta_3 & -\cos\theta_4 \\ \sin\theta_3 & -\sin\theta_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{r}_3 \\ \dot{r}_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} r_2\dot{\theta}_2 \sin\theta_2 + r_3\dot{\theta}_3 \sin\theta_3 \\ -r_2\dot{\theta}_2 \cos\theta_2 - r_3\dot{\theta}_3 \cos\theta_3 \end{Bmatrix}$$

$$\dot{r}_P = \dot{r}_2 + \dot{r}_3 = \left(-r_2\dot{\theta}_2 \sin\theta_2 - r_3\dot{\theta}_3 \sin\theta_3 + \dot{r}_3 \cos\theta_3\right)i + \left(r_2\dot{\theta}_2 \cos\theta_2 + r_3\dot{\theta}_3 \cos\theta_3 + \dot{r}_3 \sin\theta_3\right)j$$

$$= \dot{r}_4 = \left(\dot{r}_4 \cos\theta_4\right)i + \left(\dot{r}_4 \sin\theta_4\right)j$$

$$\dot{r}_Q = \dot{r}_2 = \left(-r_2\dot{\theta}_2 \sin\theta_2\right)i + \left(r_2\dot{\theta}_2 \cos\theta_2\right)j$$

Acceleration

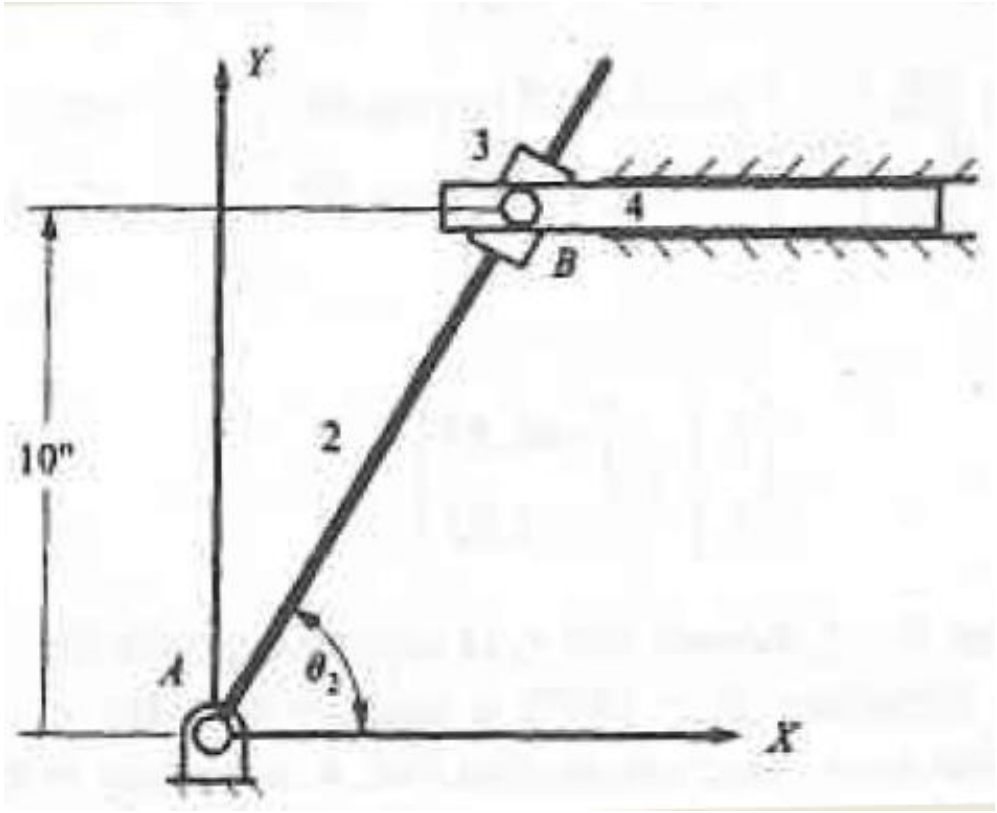
$$\ddot{\theta}_3 = \ddot{\theta}_2$$

$$\begin{bmatrix} \cos\theta_3 & -\cos\theta_4 \\ \sin\theta_3 & -\sin\theta_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{r}_3 \\ \ddot{r}_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} r_2\ddot{\theta}_2 \sin\theta_2 + r_2\dot{\theta}_2^2 \cos\theta_2 + 2\dot{r}_3\dot{\theta}_3 \sin\theta_3 + r_3\ddot{\theta}_3 \sin\theta_3 + r_3\dot{\theta}_3^2 \cos\theta_3 \\ -r_2\ddot{\theta}_2 \cos\theta_2 + r_2\dot{\theta}_2^2 \sin\theta_2 - 2\dot{r}_3\dot{\theta}_3 \cos\theta_3 - r_3\ddot{\theta}_3 \cos\theta_3 + r_3\dot{\theta}_3^2 \sin\theta_3 \end{Bmatrix}$$

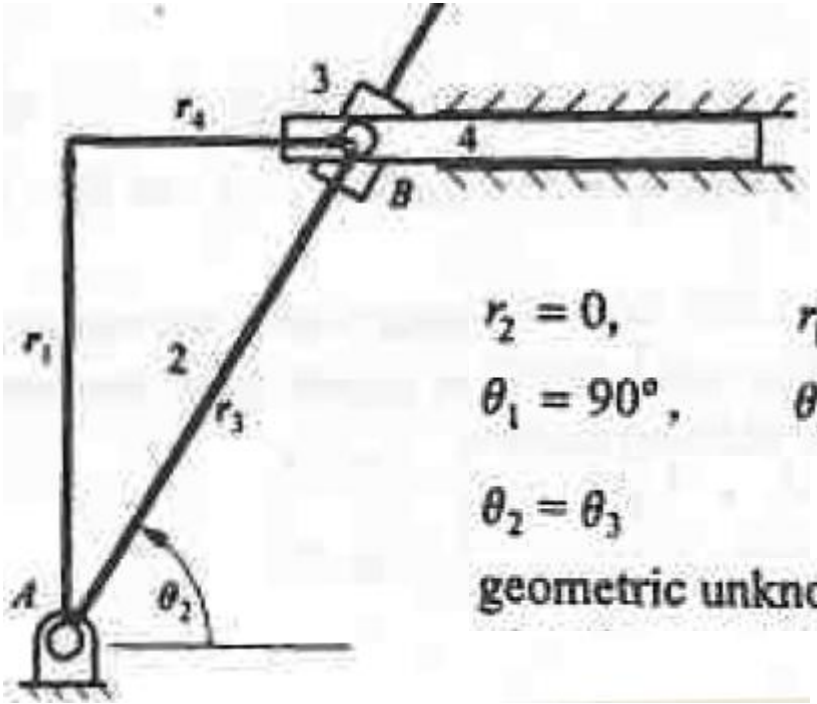
$$\ddot{r}_P = \ddot{r}_4 = \left(\ddot{r}_4 \cos\theta_4\right)i + \left(\ddot{r}_4 \sin\theta_4\right)j$$

$$\ddot{r}_Q = \ddot{r}_2 = \left(-r_2\ddot{\theta}_2 \sin\theta_2 - r_2\dot{\theta}_2^2 \cos\theta_2\right)i + \left(r_2\ddot{\theta}_2 \cos\theta_2 - r_2\dot{\theta}_2^2 \sin\theta_2\right)j$$

- مثال: در مکانیزم **RPRP** اتصال بین عضو ۲ و ۳ لغزشی است ، عضو ۴ به ۳ پین شده و روی زمین لغزش دارد. در صورتی که سرعت زاویه ای بازوی ۲ ۱۰rad/sec ، در جهت **CCW** و ثابت باشد ، سرعت و شتاب بازوی ۴ را برای زاویه $\theta_2 = 60°$ بدست آورید.



با استفاده از حلقه برداری و معادلات بدست آمده داریم:



$r_2 = 0, \quad r_1 = 10$

$\theta_1 = 90°, \quad \theta_2 = 60°, \quad \theta_3 = 60°, \quad \theta_4 = 180°$

$\theta_2 = \theta_3$

geometric unknowns are r_3 and r_4.

حل موقعیت

$$\begin{bmatrix} \cos\theta_3 & -\cos\theta_4 \\ \sin\theta_3 & -\sin\theta_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} r_3 \\ r_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} r_1\cos\theta_1 - r_2\cos\theta_2 \\ r_1\sin\theta_1 - r_2\sin\theta_2 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \cos 60^\circ & -\cos 180^\circ \\ \sin 60^\circ & -\sin 180^\circ \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} r_3 \\ r_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 10\cos 90^\circ - 0 \\ 10\sin 90^\circ - 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0.5 & 1 \\ 0.8660 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} r_3 \\ r_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 10 \end{Bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{Bmatrix} r_3 \\ r_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 11.547 \\ -5.774 \end{Bmatrix}$$

توجه روی علامت r_4: علامت منفی نشان دهنده این است که جهت r_4 در جهت خلاف θ_4 می باشد.

حل سرعت

unknowns are $\dot{r}_3$ and $\dot{r}_4$

$\dot{\theta}_2 = \dot{\theta}_3 = 10$ rad/s CCW

$$\begin{bmatrix} \cos\theta_3 & -\cos\theta_4 \\ \sin\theta_3 & -\sin\theta_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{r}_3 \\ \dot{r}_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} r_2\dot{\theta}_2 \sin\theta_2 + r_3\dot{\theta}_3 \sin\theta_3 \\ -r_2\dot{\theta}_2 \cos\theta_2 - r_3\dot{\theta}_3 \cos\theta_3 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0.5 & 1 \\ 0.8660 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{r}_3 \\ \dot{r}_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 + 11.547(10)\sin 60^\circ \\ 0 - 11.547(10)\cos 60^\circ \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 100 \\ -57.74 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \dot{r}_3 \\ \dot{r}_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -66.67 \\ 133.33 \end{Bmatrix}$$

حل شتاب

unknowns are $\ddot{r}_3$ and $\ddot{r}_4$.

$$\ddot{\theta}_2 = \ddot{\theta}_3 = 0$$

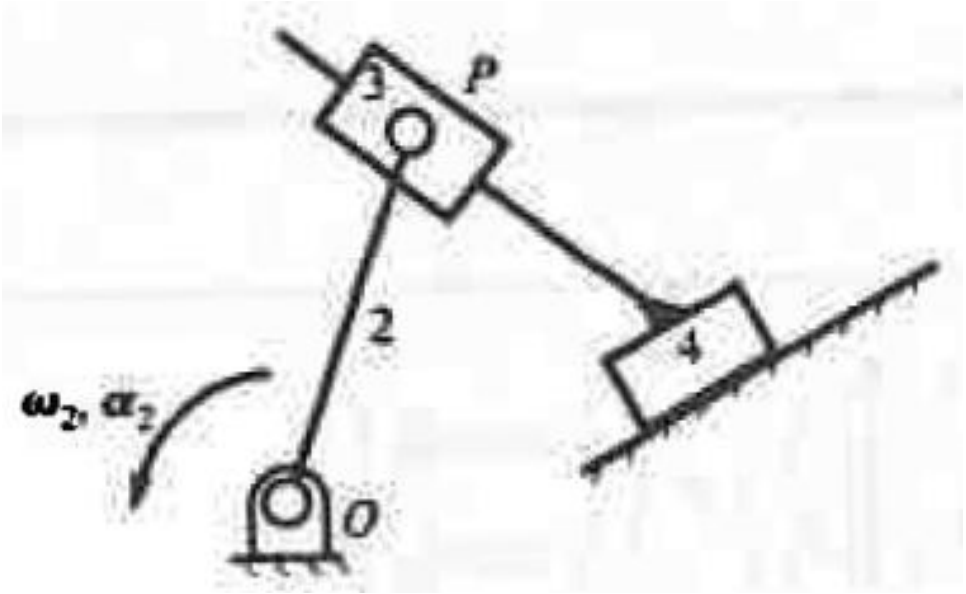
$$\begin{bmatrix} \cos\theta_3 & -\cos\theta_4 \\ \sin\theta_3 & -\sin\theta_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{r}_3 \\ \ddot{r}_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} r_2\ddot{\theta}_2 \sin\theta_2 + r_2\dot{\theta}_2^2 \cos\theta_2 + 2\dot{r}_3\dot{\theta}_3 \sin\theta_3 + r_3\ddot{\theta}_3 \sin\theta_3 + r_3\dot{\theta}_3^2 \cos\theta_3 \\ -r_2\ddot{\theta}_2 \cos\theta_2 + r_2\dot{\theta}_2^2 \sin\theta_2 - 2\dot{r}_3\dot{\theta}_3 \cos\theta_3 - r_3\ddot{\theta}_3 \cos\theta_3 + r_3\dot{\theta}_3^2 \sin\theta_3 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0.5 & 1 \\ 0.8660 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{r}_3 \\ \ddot{r}_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -577.4 \\ 1666.7 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \ddot{r}_3 \\ \ddot{r}_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1924.5 \\ -1539.6 \end{Bmatrix}$$

بحث روی نتایج

- معادلات تحلیلی برای مکانیزم RRPP

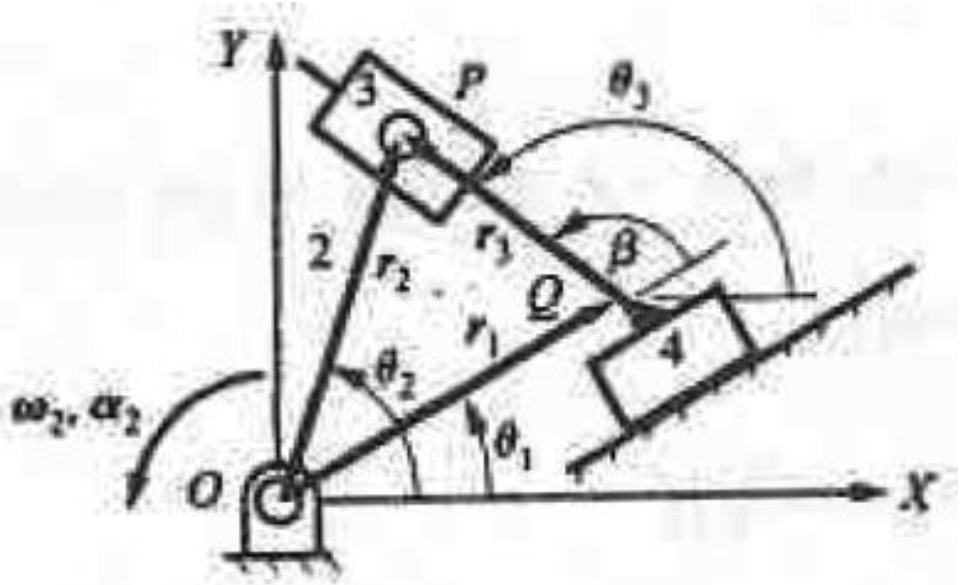


This mechanism occurs frequently in industrial machinery and household appliances
A common version of it is the Scotch yoke,
converting rotary motion to reciprocating motion.

حل موقعیت

یک بردار در راستای لغزش لازم است

با سه بردار می توان حلقه بسته موقعیت را نمایش داد.



$$r_P = r_2 = r_1 + r_3$$

$$r_2 \cos\theta_2 = r_1 \cos\theta_1 + r_3 \cos\theta_3$$

$$r_2 \sin\theta_2 = r_1 \sin\theta_1 + r_3 \sin\theta_3$$

θ_1, r_2, and θ_3 are constants

$\theta_3 = \theta_1 + \beta$ β is a constant

variables are r_1, θ_2, and r_3

the closure equations
must be satisfied throughout the motion of the linkage

Position

$$\theta_3 = \theta_1 + \beta$$

$$\begin{bmatrix} \cos\theta_1 & \cos\theta_3 \\ \sin\theta_1 & \sin\theta_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} r_1 \\ r_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} r_2\cos\theta_2 \\ r_2\sin\theta_2 \end{Bmatrix}$$

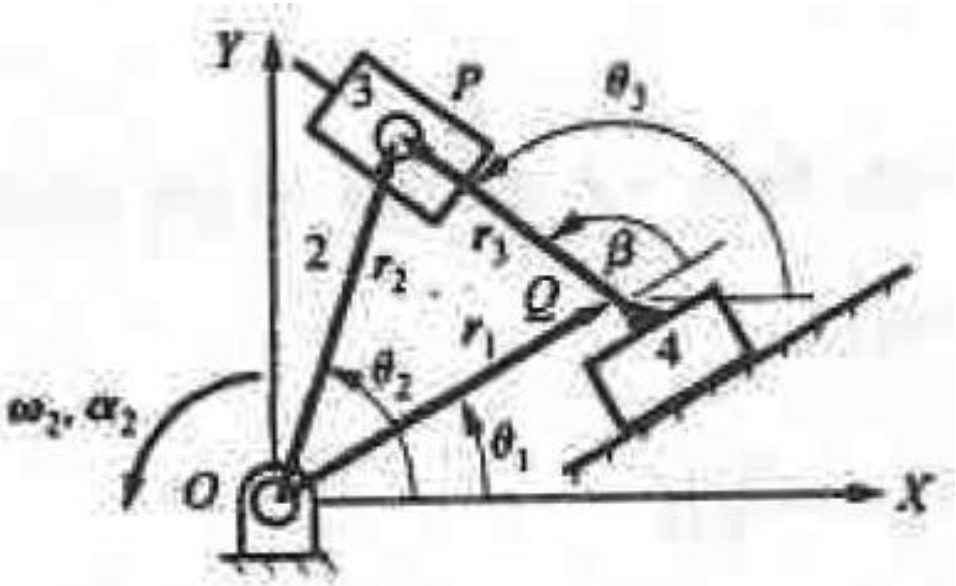
$$r_P = r_2 = (r_2\cos\theta_2)i + (r_2\sin\theta_2)j$$

$$r_Q = r_1 = (r_1\cos\theta_1)i + (r_1\sin\theta_1)j$$

حل برای حالتی که θ_2 ورودی باشد

وقتی که θ_2 ورودی باشد معادلات حلقه بسته نسبت به r_1 و r_3 خطی می باشند.

فقط یک حالت مونتاژ وجود دارد.



حل سرعت و شتاب

Velocity

$$\begin{bmatrix} \cos\theta_1 & \cos\theta_3 \\ \sin\theta_1 & \sin\theta_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{r}_1 \\ \dot{r}_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -r_2\dot{\theta}_2 \sin\theta_2 \\ r_2\dot{\theta}_2 \cos\theta_2 \end{Bmatrix}$$

$$\dot{r}_P = \dot{r}_2 = \left(-r_2\dot{\theta}_2 \sin\theta_2\right)i + \left(r_2\dot{\theta}_2 \cos\theta_2\right)j$$

$$\dot{r}_Q = \dot{r}_1 = \left(\dot{r}_1 \cos\theta_1\right)i + \left(\dot{r}_1 \sin\theta_1\right)j$$

Acceleration

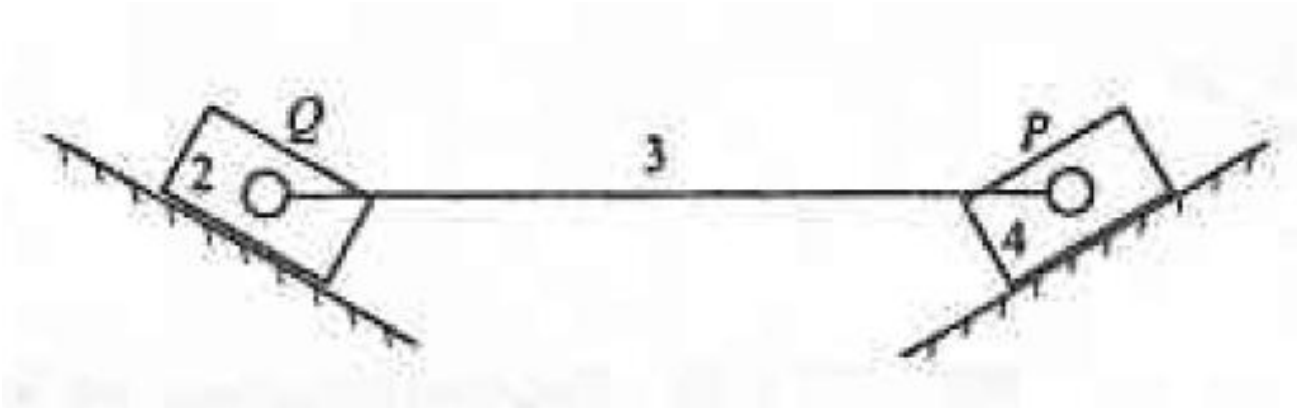
$$\begin{bmatrix} \cos\theta_1 & \cos\theta_3 \\ \sin\theta_1 & \sin\theta_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{r}_1 \\ \ddot{r}_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -r_2\ddot{\theta}_2 \sin\theta_2 - r_2\dot{\theta}_2^2 \cos\theta_2 \\ r_2\ddot{\theta}_2 \cos\theta_2 - r_2\dot{\theta}_2^2 \sin\theta_2 \end{Bmatrix}$$

$$\ddot{r}_P = \ddot{r}_2 = \left(-r_2\ddot{\theta}_2 \sin\theta_2 - r_2\dot{\theta}_2^2 \cos\theta_2\right)i + \left(r_2\ddot{\theta}_2 \cos\theta_2 - r_2\dot{\theta}_2^2 \sin\theta_2\right)j$$

$$\ddot{r}_Q = \ddot{r}_1 = \left(\ddot{r}_1 \cos\theta_1\right)i + \left(\ddot{r}_1 \sin\theta_1\right)j$$

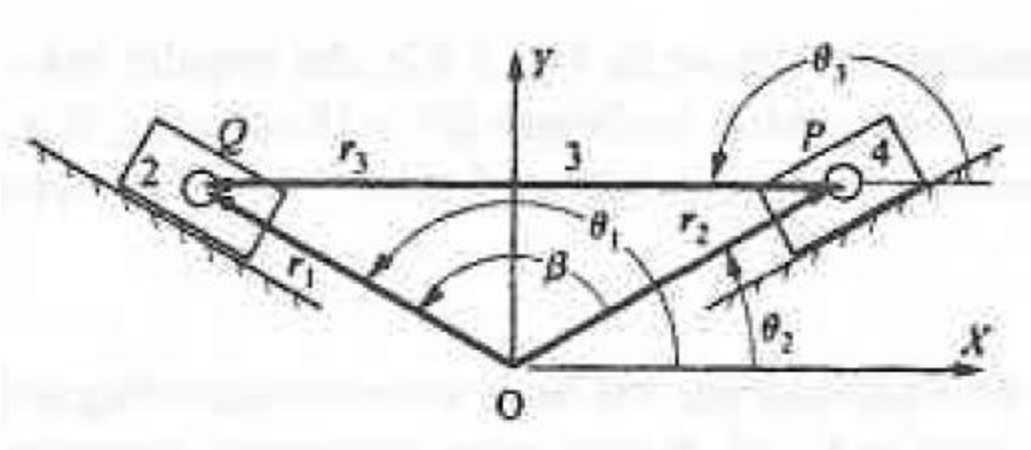
معادلات تحلیلی برای **Elliptic Trammel**

Elliptic Trammel یک معکوس مکانیزم **RRPP** می باشد.



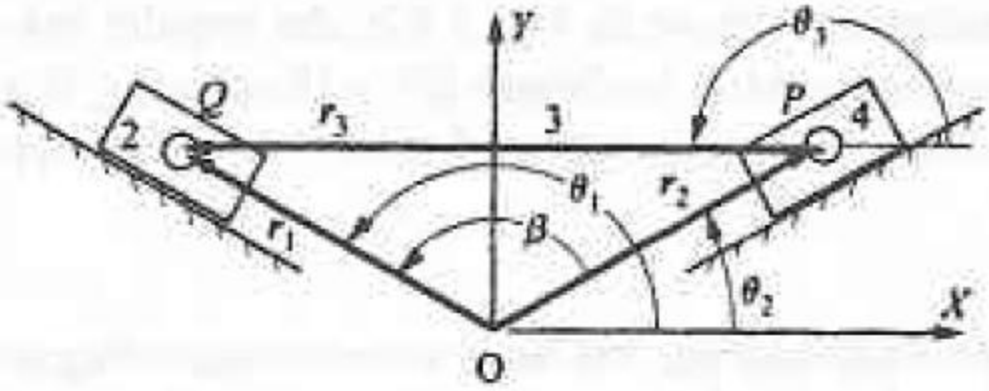
اتصال بین اعضاء ۲ و۴ با زمین از نوع prismatic یا لغزنده است و با coupler
از نوع revolute یا پین می باشد.
مسیر هر نقطه coupler روی زمین یک بیضی می باشد.

- **حل موقعیت**
  - دو بردار نسبت به مرجع ثابت و دارای لغزش مورد نیاز
  - مانند مکانیزم **RRPP** با سه بردار حلقه بسته موقعیت تشکیل می شود.



Point *O* is the origin of the frame coordinate system.

- حل موقعیت



$$r_Q = r_1 = r_2 + r_3$$

$$r_1 \cos\theta_1 = r_2 \cos\theta_2 + r_3 \cos\theta_3$$

$$r_1 \sin\theta_1 = r_2 \sin\theta_2 + r_3 \sin\theta_3$$

constants: θ_1, r_3, and θ_2.

$\theta_1 = \theta_2 + \beta$ β is a constant

variables are r_1, θ_3, and r_2.

- حل برای حالتی که θ_2 ورودی باشد

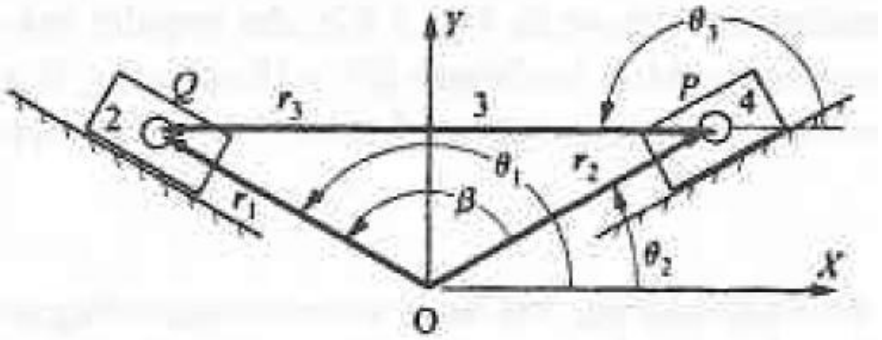
Position

$$\theta_1 = \theta_2 + \beta$$

$$\begin{bmatrix} \cos\theta_1 & -\cos\theta_2 \\ \sin\theta_1 & -\sin\theta_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} r_3\cos\theta_3 \\ r_3\sin\theta_3 \end{Bmatrix}$$

$$\boldsymbol{r}_P = \boldsymbol{r}_2 = (r_2\cos\theta_2)\boldsymbol{i} + (r_2\sin\theta_2)\boldsymbol{j}$$

$$\boldsymbol{r}_Q = \boldsymbol{r}_1 = (r_1\cos\theta_1)\boldsymbol{i} + (r_1\sin\theta_1)\boldsymbol{j}$$



Velocity

$$\begin{bmatrix} \cos\theta_1 & -\cos\theta_2 \\ \sin\theta_1 & -\sin\theta_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{r}_1 \\ \dot{r}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -r_3\dot{\theta}_3\sin\theta_3 \\ r_3\dot{\theta}_3\cos\theta_3 \end{Bmatrix}$$

$$\dot{\boldsymbol{r}}_P = \dot{\boldsymbol{r}}_2 = (\dot{r}_2\cos\theta_2)\boldsymbol{i} + (\dot{r}_2\sin\theta_2)\boldsymbol{j}$$

$$\dot{\boldsymbol{r}}_Q = \dot{\boldsymbol{r}}_1 = (\dot{r}_1\cos\theta_1)\boldsymbol{i} + (\dot{r}_1\sin\theta_1)\boldsymbol{j}$$

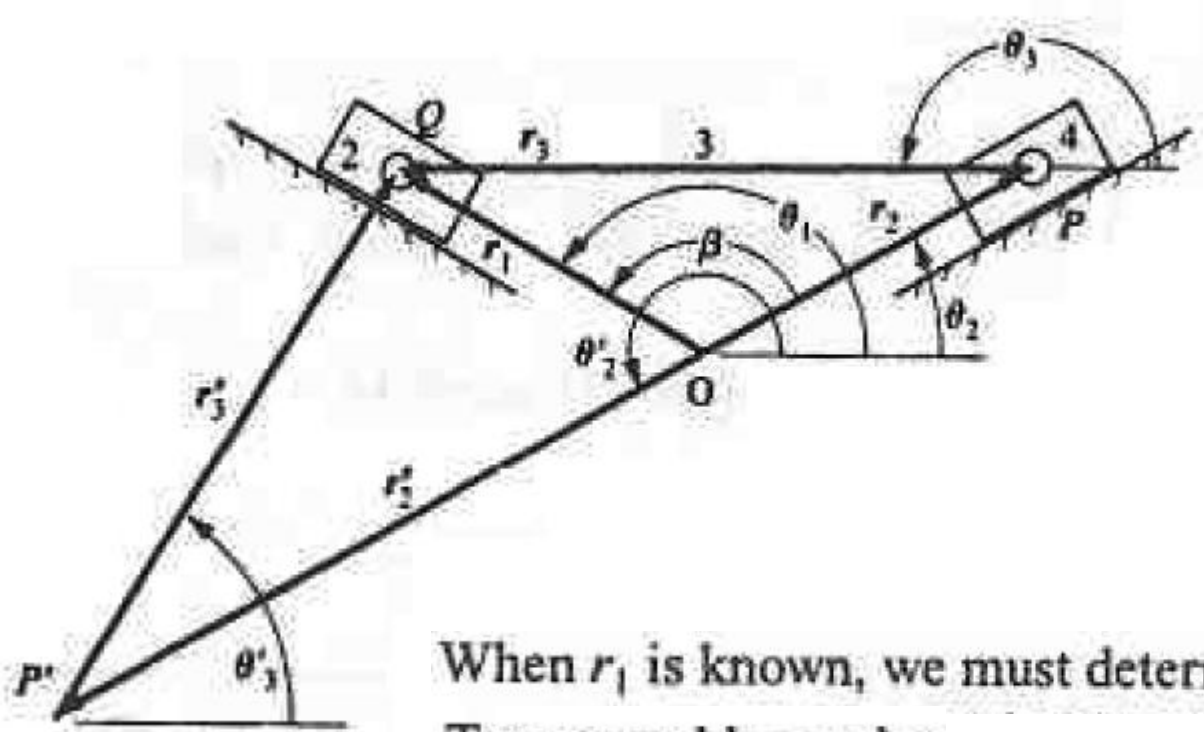
Acceleration

$$\begin{bmatrix} \cos\theta_1 & -\cos\theta_2 \\ \sin\theta_1 & -\sin\theta_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{r}_1 \\ \ddot{r}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -r_3\ddot{\theta}_3\sin\theta_3 - r_3\dot{\theta}_3^2\cos\theta_3 \\ r_3\ddot{\theta}_3\cos\theta_3 - r_3\dot{\theta}_3^2\sin\theta_3 \end{Bmatrix}$$

$$\ddot{\boldsymbol{r}}_P = \ddot{\boldsymbol{r}}_2 = (\ddot{r}_2\cos\theta_2)\boldsymbol{i} + (\ddot{r}_2\sin\theta_2)\boldsymbol{j}$$

$$\ddot{\boldsymbol{r}}_Q = \ddot{\boldsymbol{r}}_1 = (\ddot{r}_1\cos\theta_1)\boldsymbol{i} + (\ddot{r}_1\sin\theta_1)\boldsymbol{j}$$

- حل برای حالتی که r_1 ورودی باشد



When r_1 is known, we must determine θ_3 and r_2.

Two assembly modes

It is also possible to specify values for r_1 for which the mechanism cannot be assembled.

- حل موقعیت سرعت و شتاب

Position

$$\theta_1 = \theta_2 + \beta$$

$$B = -r_1\left(\cos\theta_1\cos\theta_2 + \sin\theta_1\sin\theta_2\right)$$

$$C = \left(r_1^2 - r_3^2\right)$$

$$r_2 = -B + \sigma\sqrt{B^2 - C}$$

$$\theta_3 = \tan^{-1}\frac{r_1\sin\theta_1 - r_2\sin\theta_2}{r_1\cos\theta_1 - r_2\cos\theta_2}$$

$$r_P = r_2 = \left(r_2\cos\theta_2\right)i + \left(r_2\sin\theta_2\right)j$$

$$r_Q = r_1 = \left(r_1\cos\theta_1\right)i + \left(r_1\sin\theta_1\right)j$$

Velocity

$$\begin{bmatrix}\cos\theta_2 & -r_3\sin\theta_3\\ \sin\theta_2 & r_3\cos\theta_3\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\dot r_2\\ \dot\theta_3\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}\dot r_1\cos\theta_1\\ \dot r_1\sin\theta_1\end{Bmatrix}$$

$$\dot r_P = \dot r_2 = \left(\dot r_2\cos\theta_2\right)i + \left(\dot r_2\sin\theta_2\right)j$$

$$\dot r_Q = \dot r_1 = \left(\dot r_1\cos\theta_1\right)i + \left(\dot r_1\sin\theta_1\right)j$$

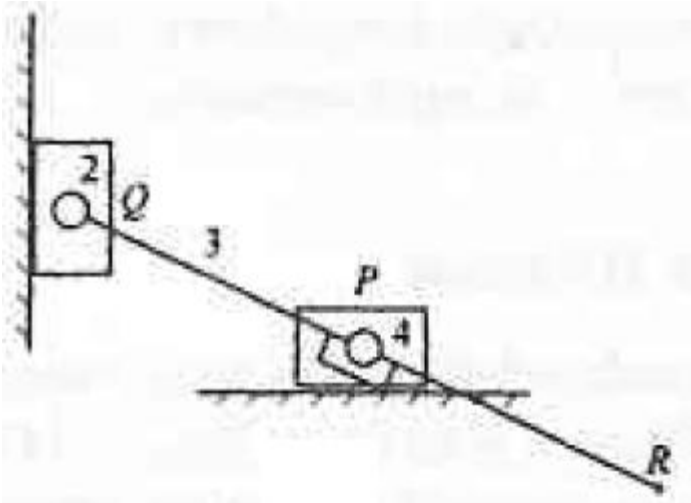
Acceleration

$$\begin{bmatrix}\cos\theta_2 & -r_3\sin\theta_3\\ \sin\theta_2 & r_3\cos\theta_3\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\ddot r_2\\ \ddot\theta_3\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}\ddot r_1\cos\theta_1 + r_3\dot\theta_3^2\cos\theta_3\\ \ddot r_1\sin\theta_1 + r_3\dot\theta_3^2\sin\theta_3\end{Bmatrix}$$

$$\ddot r_P = \ddot r_2 = \left(\ddot r_2\cos\theta_2\right)i + \left(\ddot r_2\sin\theta_2\right)j$$

$$\ddot r_Q = \ddot r_1 = \left(\ddot r_1\cos\theta_1\right)i + \left(\ddot r_1\sin\theta_1\right)j$$

- مثال: در مکانیزم زیر سرعت بازوی ۳ نسبت به زمین ۱۰ رادیان بر ثانیه و خلاف ساعت گرد و ثابت است. موعیت نقطه R و سرعت و شتل لغزنده P را برای یک دوران کامل coupler بدست آورید.



$QP = 10$ cm and QR is 20 cm.

$r_1 = 10$

$\theta_1 = 90°$, $\theta_2 = 0°$, $\beta = 90°$

$\dot{\theta}_3 = 10$, $\ddot{\theta}_3 = 0$

مکانیزم از نوع elliptic trammel است که باید بر اساس ورودی θ_3 حل گردد.

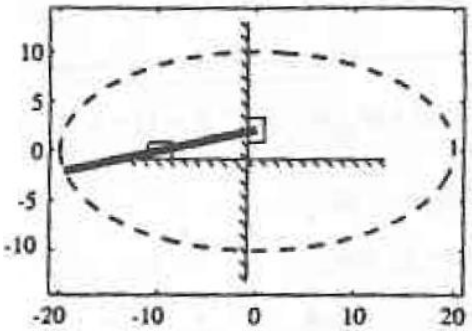
$$r_{R_3} = r_1 + r_4$$
$$\theta_4 = \theta_3 + \pi$$

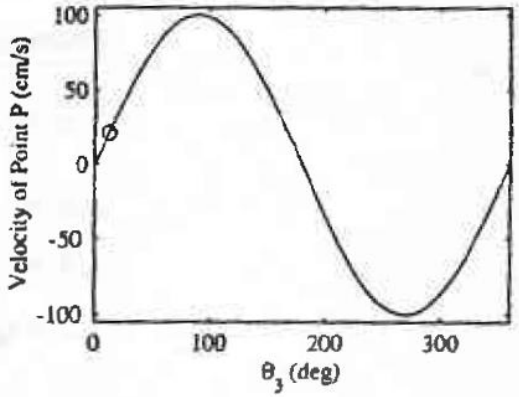
$$r_{R_3} = (r_1 \cos\theta_1 - r_4 \cos\theta_3)i + (r_1 \sin\theta_1 - r_4 \sin\theta_3)j$$

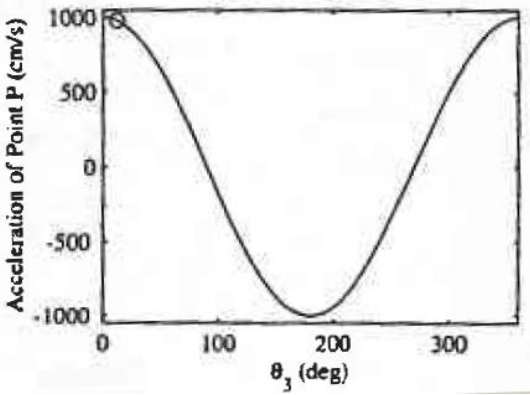
$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} r_3 \cos\theta_3 \\ r_3 \sin\theta_3 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{r}_1 \\ \dot{r}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -r_3\dot{\theta}_3 \sin\theta_3 \\ r_3\dot{\theta}_3 \cos\theta_3 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{r}_1 \\ \ddot{r}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -r_3\ddot{\theta}_3 \sin\theta_3 - r_3\dot{\theta}_3^2 \cos\theta_3 \\ r_3\ddot{\theta}_3 \cos\theta_3 - r_3\dot{\theta}_3^2 \sin\theta_3 \end{Bmatrix}$$



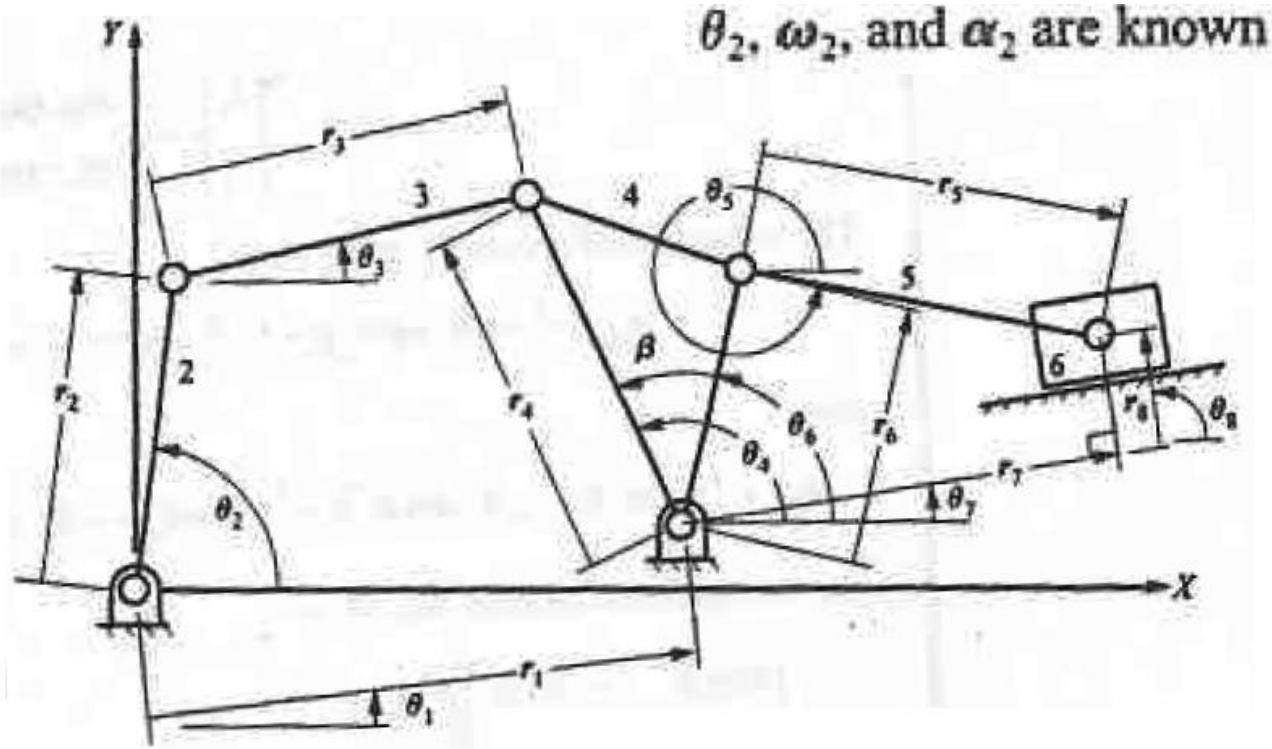




- روش حل معادلات حلقه بسته برای تحلیل مکانیزمهای مرکب

برای بیان روش مکانیزم زیر را در نظر بگیرید.

کلیه بردارها با طول r_i و زاویه θ_i نمایش داده شده اند.



فصل ۷ تحلیل مکانیزمها

روش حل:

۱- رسم دیاگرام سینماتیکی مکانیزم با مقیاس که به توان حلات مونتاژ را در آن بررسی نمود

۲- تعیین دستگاه مختصات کلی (Global) جهت مثبت اندازه گیری زوایا راستای مثبت محور X می باشد.

۳- نمایش عضو بین دو اتصال R به صورت

$\vec{r}_i = r_i(\cos\theta_i\, i + \sin\theta_i\, j)$

۴- نمایش اتصال لغزنده (P) با دو بردار یکی در راستای حرکت نسبی لغزنده و دیگری در راستای عمود بر آن

۵- تشخیص اینکه چه طول و زاویه ای ثابت و کدامیک متغیرند.

زوایای ثابت θ_1 θ_7 θ_8 β تنها طول متغیر r_7

برخی از زوایا تابعی از زاویه دیگری هستند

۶- حلقه های برداری مستقل را تشکیل داده و معادله هر حلقه را بنویسید.

$\theta_6 = \theta_4 - \beta$

$$r_1 + r_4 = r_2 + r_3$$
$$r_5 + r_6 = r_7 + r_8$$

۷- مولفه های روابط برداری را در راستای x و y نوشته شوند.

$$x \Rightarrow r_1 \cos\theta_1 + r_4 \cos\theta_4 = r_2 \cos\theta_2 + r_3 \cos\theta_3$$

$$y \Rightarrow r_1 \sin\theta_1 + r_4 \sin\theta_4 = r_2 \sin\theta_2 + r_3 \sin\theta_3$$

$$x \Rightarrow r_5 \cos\theta_5 + r_6 \cos\theta_6 = r_7 \cos\theta_7 + r_8 \cos\theta_8$$

$$y \Rightarrow r_5 \sin\theta_5 + r_6 \sin\theta_6 = r_7 \sin\theta_7 + r_8 \sin\theta_8$$

۸- قیودی که بین طولها و زوایا وجود دارند و در

$$\theta_8 = \theta_7 + \pi/2$$
$$\theta_6 = \theta_4 - \beta$$

ده اند را تعیین نمایید.

۹- همخوانی تعداد متغیرها و تعداد معادلات بررسی شود.

تعداد مجهولات = f + n

n تعداد معادلات

f تعداد درجات آزادی

اگر تعداد مجهولات بیشتر باشد باید قیود دیگری پیدا کرد و یا معادلات حلقه برداری دوباره بررسی شوند.

unknowns is seven ($\theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5, \theta_6, \theta_8$, and r_7),

$$n + f = 7$$

برای حل سرعت و شتاب ادامه دهید