فصل ۷ تحلیل مکانیزمها

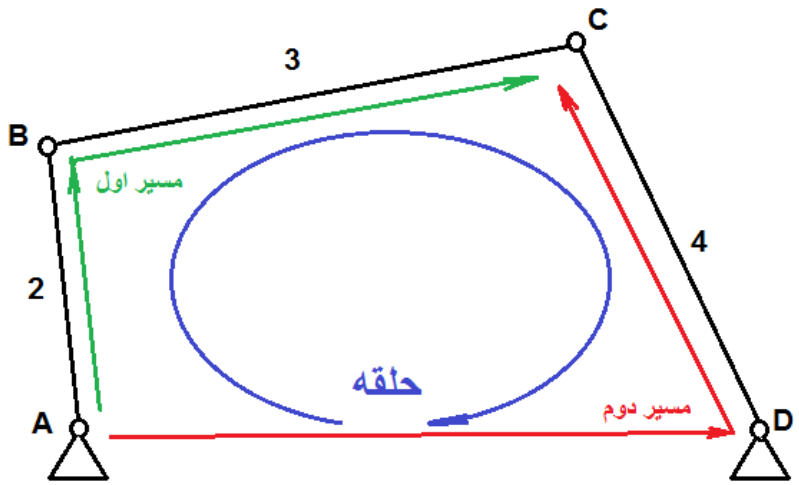
قسمت اول

- در فصلهای قبلی از روشهای ترسیمی برای تحلیل مکانیزمها استفاده شد. در این فصل از روشهای تحلیلی یا حل ریاضی معادلات استفاده می شود.

- قیود هندسی یک مکانیزم را می توان با استفاده از معادلات حلقه بسته بردارهای تغییرمکان ، سرعت و شتاب نمایش داد.

- معادلات حلقه بسته تغییر مکان برحسب دو مسیر متفاوت که دو نقطه در یک حلقه (loop) مکانیزم به هم متصل می کنند نوشته می شوند.

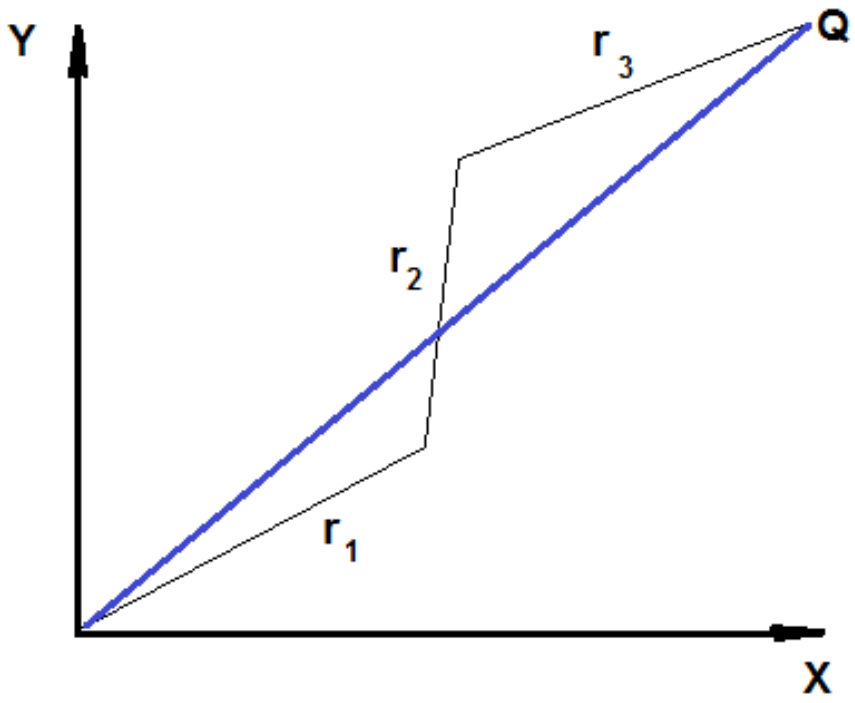
- به عنوان مثال مکانیزم چهار میله زیر را در نظر بگیرید:



- نقطه **C** از دو مسیر نمایش داده می شود.

- تغییرمکان

هنگام تحلیل یک مکانیزم می توان مکانهای نسبی زنجیره نقاط مورد نظر را با زنجیره ای از بردارها نمایش داد.



$$\vec{r}_Q = \vec{r}_1 + \vec{r}_2 + \vec{r}_3$$

$$\vec{r}_k = r_k(\cos\theta_k\,\hat{\imath} + \sin\theta_k\,\hat{\jmath})$$

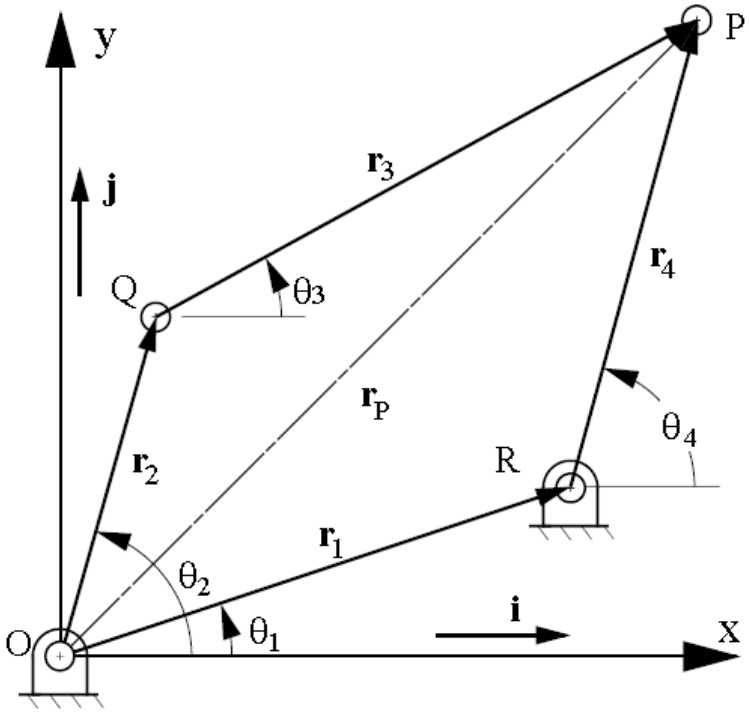
تمرین از معادلات فوق مشتق بگیرید

- معادلات تحلیلی مکانیزم چهار میله

معادلات حلقه بسته

$$r_P = r_2 + r_3 = r_1 + r_4$$

$$r_2\left(\cos\theta_2 i + \sin\theta_2 j\right) + r_3\left(\cos\theta_3 i + \sin\theta_3 j\right) = r_1\left(\cos\theta_1 i + \sin\theta_1 j\right) + r_4\left(\cos\theta_4 i + \sin\theta_4 j\right)$$



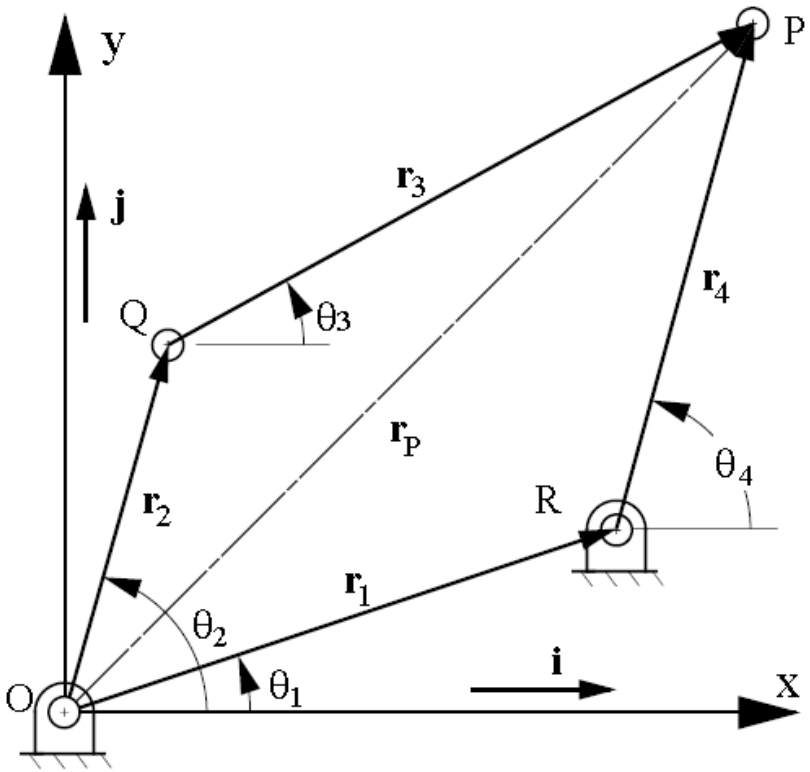
$$r_2\cos\theta_2 + r_3\cos\theta_3 = r_1\cos\theta_1 + r_4\cos\theta_4$$

$$r_2\sin\theta_2 + r_3\sin\theta_3 = r_1\sin\theta_1 + r_4\sin\theta_4$$

Loop closure equation

حل چهار میله برای حالتی که بازوی ۲ محرک باشد:

- بردار $\mathbf{r_1}$ ثابت ، θ_1 و r_1 ثابت می باشند
- ورودی ها
  - در حل تغییر مکان θ_2
  - در حل سرعت $\dot{\theta}_2$
  - در حل شتاب $\ddot{\theta}_2$
- مجهولات
  - در حل تغییر مکان θ_4 θ_3
  - در حل سرعت $\dot{\theta}_4$ $\dot{\theta}_3$
  - در حل شتاب $\ddot{\theta}_4$ $\ddot{\theta}_3$



آیا قابل حل است ؟

حل معادلات مکانیزم چهار میله

Position Analysis — دستگاه معادلات غیر خطی

↓

Velocity Analysis — دستگاه معادلات خطی

↓

Acceleration Analysis — دستگاه معادلات خطی

- حل معادلات موقعیت
  - مجهولات θ_4 θ_3
  - توان ۲ رساندن طرفین و حذف θ_3

$$r_3\cos\theta_3 = r_1\cos\theta_1 + r_4\cos\theta_4 - r_2\cos\theta_2$$

$$r_3\sin\theta_3 = r_1\sin\theta_1 + r_4\sin\theta_4 - r_2\sin\theta_2$$

$$r_3^2 = r_1^2 + r_2^2 + r_4^2 + 2r_1r_4\left(\cos\theta_1\cos\theta_4 + \sin\theta_1\sin\theta_4\right)$$
$$-2r_1r_2\left(\cos\theta_1\cos\theta_2 + \sin\theta_1\sin\theta_2\right) + 2r_2r_4\left(\cos\theta_2\cos\theta_4 + \sin\theta_2\sin\theta_4\right)$$

در معادله فوق θ_4 برحسب θ_2 بصورت ضمنی داده شده ، اما آنچه مورد نظر است حل صریح می باشد.

پس از مرتب سازی برحسب ضرایب θ_2 و θ_4 داریم

$$A\cos\theta_4 + B\sin\theta_4 + C = 0$$

where

$$\left.\begin{aligned} A &= 2r_1r_4\cos\theta_1 - 2r_2r_4\cos\theta_2 \\ B &= 2r_1r_4\sin\theta_1 - 2r_2r_4\sin\theta_2 \\ C &= r_1^2 + r_2^2 + r_4^2 - r_3^2 - 2r_1r_2\left(\cos\theta_1\cos\theta_2 + \sin\theta_1\sin\theta_2\right) \end{aligned}\right\}$$

برای حل معادله مثلثاتی فوق از تانژانت نصف قوس استفاده می کنیم:

$$\sin\theta_4 = \frac{2\tan\left(\frac{\theta_4}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\frac{\theta_4}{2}\right)}$$

$$\cos\theta_4 = \frac{1-\tan^2\left(\frac{\theta_4}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\frac{\theta_4}{2}\right)}$$

$$(C-A)t^2 + 2Bt + (A+C) = 0$$

$$t = \tan\left(\frac{\theta_4}{2}\right)$$

t ریشه های معادله درجه ۲ فوق می باشد که هر دو جواب معتبراست

$$t = \frac{-2B + \sigma\sqrt{4B^2 - 4(C-A)(C+A)}}{2(C-A)} = \frac{-B + \sigma\sqrt{B^2 - C^2 + A^2}}{C-A}$$

$\sigma = \pm 1$ is a sign variable identifying the assembly mode

$$\theta_4 = 2\tan^{-1} t$$

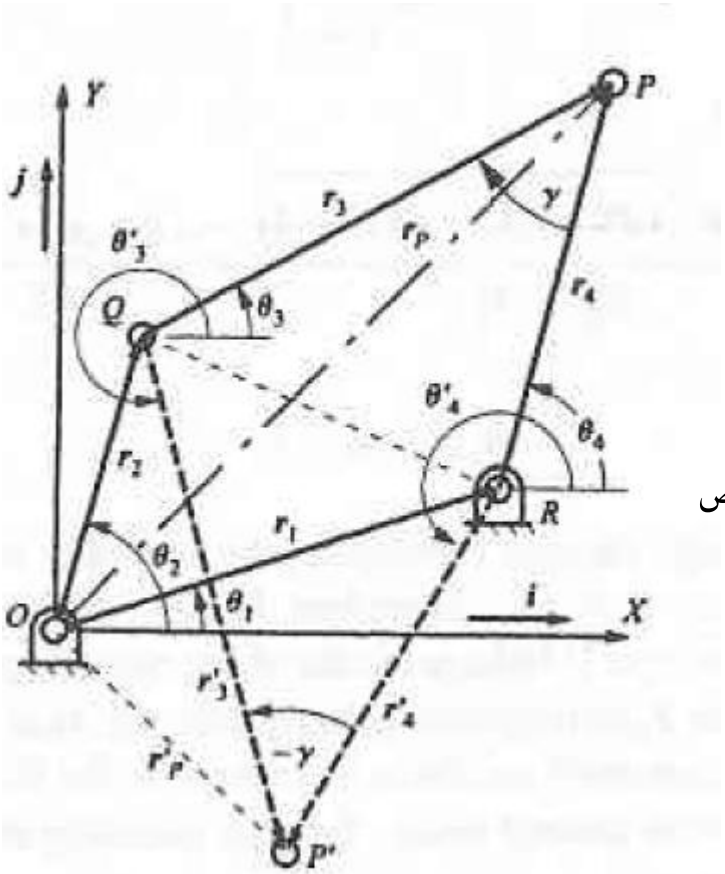
دو جواب برای θ_4 وجود دارد که هر دو جواب معتبرند.

پس از بدست آوردن θ_4 می توان معادلات حلقه را برای متغیر θ_3 حل نمود.

$$\theta_3 = \tan^{-1}\left[\frac{r_1 \sin\theta_1 + r_4 \sin\theta_4 - r_2 \sin\theta_2}{r_1 \cos\theta_1 + r_4 \cos\theta_4 - r_2 \cos\theta_2}\right]$$

واضح است که علامت صورت و مخرج کسر فوق معین می کند که θ_3 درکدام ربع قرار گرفته است لذا از تابع atan2 استفاده می شود.

$$\text{ATAN2}(\sin\theta_3, \cos\theta_3) = \tan^{-1}\left[\frac{\sin\theta_3}{\cos\theta_3}\right].$$



همانطوریکه بحث شد برای هر مقدار θ_2 دو مقدار θ_3 و θ_4 بدست می آید.

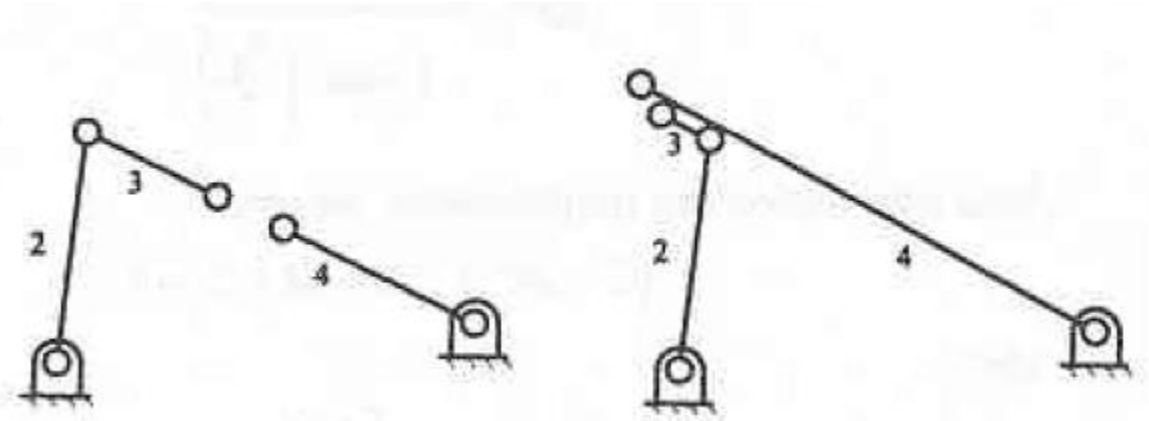
"ابهام در مونتاژ assembly ambiguity"

- P و P' دو حل ممکن برای برای مسئله فوق است.
- توجه شود که دو حالت نسبت به خط QR متقارن می باشند.
- علامت γ در حل دوم معکوس شده است که می توان از آن به عنوان یک شاخص انتخاب حالت استفاده کرد.

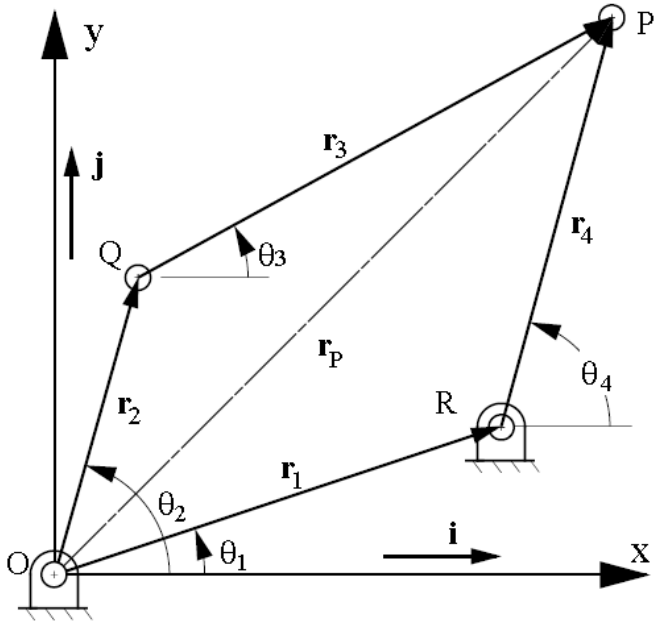
- در چه صورت t موهومی است

اگر $(A^2+B^2) < C^2$

در این صورت مکانیزم داده شده در موقعیت زاویه ای θ_2 نمی تواند مونتاژ شود.



- پس از تعیین زوایای موقعیت هر نقطه از مکانیزم چهار میله قابل محاسبه است.
- تمرین- معادلات موقعیت مکانیزم چهار میله را برای حالتی که coupler ورودی است بدست آورید.



- **معادلات سرعت مکانیزم چهار میله**

با مشتق گیری از معادلات حلقه بسته موقعیت داریم

$$\dot{r}_P = \dot{r}_2 + \dot{r}_3 = \dot{r}_1 + \dot{r}_4$$

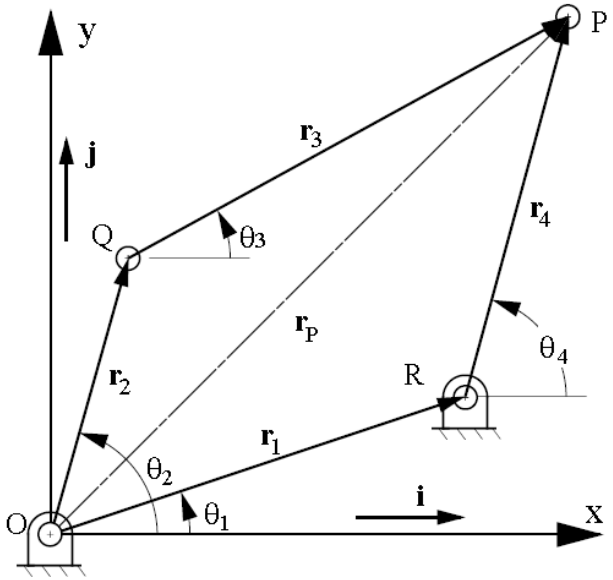
توجه شود که در معادله فوق طول کلیه بازوها ثابت می باشند.

$$r_2\dot{\theta}_2 \sin\theta_2 + r_3\dot{\theta}_3 \sin\theta_3 = r_4\dot{\theta}_4 \sin\theta_4$$

$$r_2\dot{\theta}_2 \cos\theta_2 + r_3\dot{\theta}_3 \cos\theta_3 = r_4\dot{\theta}_4 \cos\theta_4$$

در معادله فوق اگر $\dot{\theta}_2$ و $\dot{\theta}_3$ و $\dot{\theta}_4$ باشد مجهولات عبارتند از

در معادله فوق اگر $\dot{\theta}_3$ و $\dot{\theta}_4$ باشد مجهولات عبارتند از



اگر به شکل معادلات توجه شود مشخص می شود که دستگاه معادلات خطی می باشد.

می توان معادلات سرعت به صورت ماتریس نمایش داد:

$$\begin{bmatrix} -r_J \sin\theta_J & r_4 \sin\theta_4 \\ -r_J \cos\theta_J & r_4 \cos\theta_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\theta}_J \\ \dot{\theta}_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} r_M \dot{\theta}_M \sin\theta_M \\ r_M \dot{\theta}_M \cos\theta_M \end{Bmatrix}$$

$M = 2$ and $J = 3$ for $\dot{\theta}_2$

$M = 3$ and $J = 2$ for $\dot{\theta}_3$ as the input

وقتی سرعت زاویه ای بازوها محاسبه شدند می توان سرعت خطی هر نقطه مورد نظر روی مکانیزم را محاسبه نمود

$$\dot{r}_P = \dot{r}_2 + \dot{r}_3 = \left(-r_2\dot{\theta}_2 \sin\theta_2 - r_3\dot{\theta}_3 \sin\theta_3\right)i + \left(r_2\dot{\theta}_2 \cos\theta_2 + r_3\dot{\theta}_3 \cos\theta_3\right)j$$
$$= \dot{r}_1 + \dot{r}_4 = \left(-r_4\dot{\theta}_4 \sin\theta_4\right)i + \left(r_4\dot{\theta}_4 \cos\theta_4\right)j$$

معادلات شتاب مکانیزم چهار میله

با مشتق گیری از معادلات سرعت معادلات شتاب حاصل می شود.

$$\ddot{\vec{r}}_P = \ddot{\vec{r}}_2 + \ddot{\vec{r}}_3 = \ddot{\vec{r}}_1 + \ddot{\vec{r}}_4$$

$$r_2\ddot{\theta}_2 \sin\theta_2 + r_2\dot{\theta}_2^2 \cos\theta_2 + r_3\ddot{\theta}_3 \sin\theta_3 + r_3\dot{\theta}_3^2 \cos\theta_3 = r_4\ddot{\theta}_4 \sin\theta_4 + r_4\dot{\theta}_4^2 \cos\theta_4$$

$$r_2\ddot{\theta}_2 \cos\theta_2 - r_2\dot{\theta}_2^2 \sin\theta_2 + r_3\ddot{\theta}_3 \cos\theta_3 - r_3\dot{\theta}_3^2 \sin\theta_3 = r_4\ddot{\theta}_4 \cos\theta_4 + r_4\dot{\theta}_4^2 \sin\theta_4$$

اگر $\ddot{\theta}_2$ تمامی جملات مربوط به سرعت و شتاب معلوم باشند ، مجهولات عبارتند از $\ddot{\theta}_3$ and $\ddot{\theta}_4$

او وقتی که $\ddot{\theta}_3$ و$\ddot{\theta}_4$ی جملات مربوط به سرعت و شتاب معلوم باشند ، مجهولات عبارتند از $\ddot{\theta}_2$ and $\ddot{\theta}_4$

دستگاه فوق خطی بوده و به آسانی قابل حل است.

$$\begin{bmatrix} -r_J \sin\theta_J & r_4 \sin\theta_4 \\ -r_J \cos\theta_J & r_4 \cos\theta_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\theta}_J \\ \ddot{\theta}_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} r_M \ddot{\theta}_M \sin\theta_M + r_M \dot{\theta}_M^2 \cos\theta_M + r_J \dot{\theta}_J^2 \cos\theta_J - r_4 \dot{\theta}_4^2 \cos\theta_4 \\ r_M \ddot{\theta}_M \cos\theta_M - r_M \dot{\theta}_M^2 \sin\theta_M - r_J \dot{\theta}_J^2 \sin\theta_J - r_4 \dot{\theta}_4^2 \sin\theta_4 \end{Bmatrix}$$

$M = 2$ and $J = 3$ for $\ddot{\theta}_2$ as the input

$M = 3$ and $J = 2$ for $\ddot{\theta}_3$ as the input

وقتی شتاب زاویه ای بازوها محاسبه شدند می توان شتاب خطی هر نقطه مورد نظر روی مکانیزم را محاسبه نمود

$$\ddot{\vec{r}}_P = \ddot{\vec{r}}_2 + \ddot{\vec{r}}_3 = -\left(r_2\ddot{\theta}_2 \sin\theta_2 + r_2\dot{\theta}_2^2 \cos\theta_2 + r_3\ddot{\theta}_3 \sin\theta_3 + r_3\dot{\theta}_3^2 \cos\theta_3\right)\vec{i} + \left(r_2\ddot{\theta}_2 \cos\theta_2 - r_2\dot{\theta}_2^2 \sin\theta_2 + r_3\ddot{\theta}_3 \cos\theta_3 - r_3\dot{\theta}_3^2 \sin\theta_3\right)\vec{j}$$

$$= \ddot{\vec{r}}_1 + \ddot{\vec{r}}_4 = -\left(r_4\ddot{\theta}_4 \sin\theta_4 + r_4\dot{\theta}_4^2 \cos\theta_4\right)\vec{i} + \left(r_4\ddot{\theta}_4 \cos\theta_4 - r_4\dot{\theta}_4^2 \sin\theta_4\right)\vec{j}$$

خلاصه معادلات مورد نیاز برای حل موقعیت ، سرعت و شتاب مکانیزم چهار میله

Position

$$A = 2r_1 r_4 \cos\theta_1 - 2r_M r_4 \cos\theta_M$$
$$B = 2r_1 r_4 \sin\theta_1 - 2r_M r_4 \sin\theta_M$$
$$C = r_1^2 + r_M^2 + r_4^2 - r_J^2 - 2r_1 r_M\left(\cos\theta_1\cos\theta_M + \sin\theta_1\sin\theta_M\right)$$

$$\theta_4 = 2\tan^{-1}\left[\frac{-B + \sigma\sqrt{B^2 - C^2 + A^2}}{C - A}\right]; \qquad \sigma = \pm 1$$

$$\theta_J = \tan^{-1}\left[\frac{r_1\sin\theta_1 + r_4\sin\theta_4 - r_M\sin\theta_M}{r_1\cos\theta_1 + r_4\cos\theta_4 - r_M\cos\theta_M}\right]$$

$$\boldsymbol{r}_Q = \boldsymbol{r}_2 = r_2\left(\cos\theta_2\boldsymbol{i} + \sin\theta_2\boldsymbol{j}\right)$$

$$\boldsymbol{r}_P = \boldsymbol{r}_2 + \boldsymbol{r}_3 = r_2\left(\cos\theta_2\boldsymbol{i} + \sin\theta_2\boldsymbol{j}\right) + r_3\left(\cos\theta_3\boldsymbol{i} + \sin\theta_3\boldsymbol{j}\right)$$
$$= \boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{r}_4 = r_1\left(\cos\theta_1\boldsymbol{i} + \sin\theta_1\boldsymbol{j}\right) + r_4\left(\cos\theta_4\boldsymbol{i} + \sin\theta_4\boldsymbol{j}\right)$$

$$\boldsymbol{r}_R = \boldsymbol{r}_1 = r_1\left(\cos\theta_1\boldsymbol{i} + \sin\theta_1\boldsymbol{j}\right)$$

Velocity

$$\begin{bmatrix} -r_J\sin\theta_J & r_4\sin\theta_4 \\ -r_J\cos\theta_J & r_4\cos\theta_4 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\dot\theta_J \\ \dot\theta_4\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} r_M\dot\theta_M\sin\theta_M \\ r_M\dot\theta_M\cos\theta_M\end{Bmatrix}$$

$$\dot{\boldsymbol{r}}_Q = \dot{\boldsymbol{r}}_2 = r_2\dot\theta_2\left(-\sin\theta_2\boldsymbol{i} + \cos\theta_2\boldsymbol{j}\right)$$

$$\dot{\boldsymbol{r}}_P = \left(-r_4\dot\theta_4\sin\theta_4\right)\boldsymbol{i} + \left(r_4\dot\theta_4\cos\theta_4\right)\boldsymbol{j}$$

Acceleration

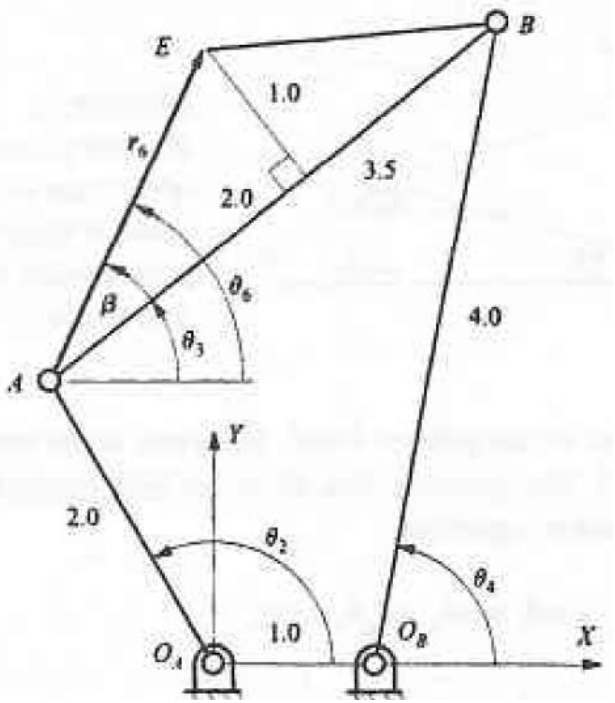
$$\begin{bmatrix} -r_J\sin\theta_J & r_4\sin\theta_4 \\ -r_J\cos\theta_J & r_4\cos\theta_4 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\ddot\theta_J \\ \ddot\theta_4\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} r_M\ddot\theta_M\sin\theta_M + r_M\dot\theta_M^2\cos\theta_M + r_J\dot\theta_J^2\cos\theta_J - r_4\dot\theta_4^2\cos\theta_4 \\ r_M\ddot\theta_M\cos\theta_M - r_M\dot\theta_M^2\sin\theta_M - r_J\dot\theta_J^2\sin\theta_J + r_4\dot\theta_4^2\sin\theta_4\end{Bmatrix}$$

$$\ddot{\boldsymbol{r}}_Q = \ddot{\boldsymbol{r}}_2 = \left(-r_2\ddot\theta_2\sin\theta_2 - r_2\dot\theta_2^2\cos\theta_2\right)\boldsymbol{i} + \left(r_2\ddot\theta_2\cos\theta_2 - r_2\dot\theta_2^2\sin\theta_2\right)\boldsymbol{j}$$

$$\ddot{\boldsymbol{r}}_P = -\left(r_4\ddot\theta_4\sin\theta_4 + r_4\dot\theta_4^2\cos\theta_4\right)\boldsymbol{i} + \left(r_4\ddot\theta_4\cos\theta_4 - r_4\dot\theta_4^2\sin\theta_4\right)\boldsymbol{j}$$

مثال: در مکانیزم زیر در صورتی که $r_1 = 1, r_2 = 2, r_3 = 3.5, r_4 = 4, \text{and } \theta_1 = 0$

باشد ، مقادیر $\theta_3 \text{ and } \theta_4$ را یک از حالات حل بدست آورید.



$$\theta_2 = 0,\ \pi/2,\ \pi, \text{ and } -\pi/2$$

for $\theta_2 = 0$

$$A = 2r_1r_4\cos\theta_1 - 2r_2r_4\cos\theta_2 = 2(1)(4) - 2(2)(4) = -8$$

$$B = 2r_1r_4\sin\theta_1 - 2r_2r_4\sin\theta_2 = 0$$

$$C = r_1^2 + r_2^2 + r_4^2 - r_3^2 - 2r_1r_2\left(\cos\theta_1\cos\theta_2 + \sin\theta_1\sin\theta_2\right) = 1^2 + 2^2 + 4^2 - 3.5^2 - 2(1)(2) = 4.75$$

$$\theta_4 = 2\tan^{-1}\left[\frac{-B + \sigma\sqrt{B^2 - C^2 + A^2}}{C - A}\right]$$

$$= 2\tan^{-1}\left[\frac{-0 + \sqrt{0^2 - 4.75^2 + (-8)^2}}{4.75 + 8}\right] = 2\tan^{-1}(0.5049) = 53.58°$$

$$\theta_3 = \tan^{-1}\left[\frac{r_1\sin\theta_1 + r_4\sin\theta_4 - r_2\sin\theta_2}{r_1\cos\theta_1 + r_4\cos\theta_4 - r_2\cos\theta_2}\right]$$

$$= \tan^{-1}\left[\frac{4\sin(53.58°)}{1 + 4\cos(53.58°) - 2}\right] = \tan^{-1}\left[\frac{3.2187}{1.3748}\right] = \tan^{-1}(2.3412) = 66.87°$$

جدول خلاصه نتایج

θ_2	σ	A	B	C	θ_4	θ_3
0	1	−8	0	4.75	53.58°	66.87°
	−1				−53.58°	−66.87°
$\pi/2$	1	87	−16	8.75	177.28°	−143.85°
	−1				55.85°	21.98°
π	1	24	0	12.75	−122.09°	−75.52°
	−1				122.09°	75.52°
$-\pi/21$	1	8	16	8.75	−55.85°	−21.98°
	−1				−177.28°	148.85°

در صورتی که $\dot{\theta}_2 = 10 \text{ rad/s and } \ddot{\theta}_2 = 0$ برای حالت $\theta_2 = 0$ .. $\dot{\theta}_3, \dot{\theta}_4, \ddot{\theta}_3, \ddot{\theta}_4$

$$\begin{bmatrix} -r_3 \sin\theta_3 & r_4 \sin\theta_4 \\ -r_3 \cos\theta_3 & r_4 \cos\theta_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\theta}_3 \\ \dot{\theta}_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} r_2\dot{\theta}_2 \sin\theta_2 \\ r_2\dot{\theta}_2 \cos\theta_2 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -3.5\sin(66.87^\circ) & 4\sin(53.58^\circ) \\ -3.5\cos(66.87^\circ) & 4\cos(53.58^\circ) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\theta}_3 \\ \dot{\theta}_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2(10)\sin(0^\circ) \\ 2(10)\cos(0^\circ) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -3.2187 & 3.2187 \\ -1.3749 & 2.3748 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\theta}_3 \\ \dot{\theta}_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 20 \end{Bmatrix}$$

$$\rightarrow \quad \dot{\theta}_3 = 20 \text{ rad/s and } \dot{\theta}_4 = 20.0 \text{ rad/s}$$

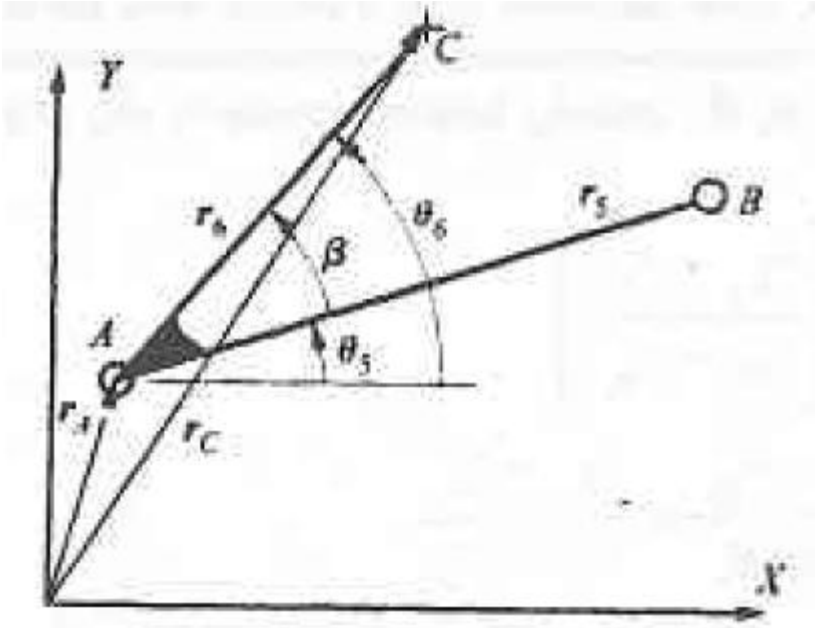
$$\begin{bmatrix} -r_3 \sin\theta_3 & r_4 \sin\theta_4 \\ -r_3 \cos\theta_3 & r_4 \cos\theta_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\theta}_3 \\ \ddot{\theta}_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} r_2\ddot{\theta}_2 \sin\theta_2 + r_2\dot{\theta}_2^2 \cos\theta_2 + r_3\dot{\theta}_3^2 \cos\theta_3 - r_4\dot{\theta}_4^2 \cos\theta_4 \\ r_2\ddot{\theta}_2 \cos\theta_2 - r_2\dot{\theta}_2^2 \sin\theta_2 - r_3\dot{\theta}_3^2 \sin\theta_3 - r_4\dot{\theta}_4^2 \sin\theta_4 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -3.2187 & 3.2187 \\ -1.3749 & 2.3748 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\theta}_3 \\ \ddot{\theta}_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 + 2(10)^2 + 3.5(20)^2 \cos(66.87^\circ) - 4(20)^2 \cos(53.58^\circ) \\ 0 - 0 - 3.5(20)^2 \sin(66.87^\circ) + 4(20)^2 \sin(53.58^\circ) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -200.0265 \\ -0.0363 \end{Bmatrix}$$

$$\rightarrow \quad \ddot{\theta}_3 = 147.5634 \text{ rad/s}^2 \text{ and } \ddot{\theta}_4 = 85.4150 \text{ rad/s}^2$$

معادلات تحلیلی برای جسم صلب پس از تعیین سینماتیک دو نقطه

حالت اول: $\theta_5, \dot{\theta}_5, \text{and } \ddot{\theta}_5 \text{ are known}$



$$\mathbf{r}_C = \mathbf{r}_A + \mathbf{r}_6$$

$$\mathbf{r}_C = \mathbf{r}_A + r_6\left(\cos\theta_6 \mathbf{i} + \sin\theta_6 \mathbf{j}\right)$$

$$\theta_6 = \beta + \theta_5$$

$$\dot{\mathbf{r}}_C = \dot{\mathbf{r}}_A + r_6\dot{\theta}_5\left(-\sin\theta_6 \mathbf{i} + \cos\theta_6 \mathbf{j}\right)$$

$$\ddot{\mathbf{r}}_C = \ddot{\mathbf{r}}_A + r_6\ddot{\theta}_5\left(-\sin\theta_6 \mathbf{i} + \cos\theta_6 \mathbf{j}\right) - r_6\dot{\theta}_5^2\left(\cos\theta_6 \mathbf{i} + \sin\theta_6 \mathbf{j}\right)$$

حالت دوم: وقتی سینماتیک دو نقطه از جسم داده شده است.

$$\theta_5 = \tan^{-1}\left[\frac{r_{B_y} - r_{A_y}}{r_{B_x} - r_{A_x}}\right]$$

$$\dot{r}_B = \dot{r}_A + r_5\dot{\theta}_5\left(-\sin\theta_5 i + \cos\theta_5 j\right)$$

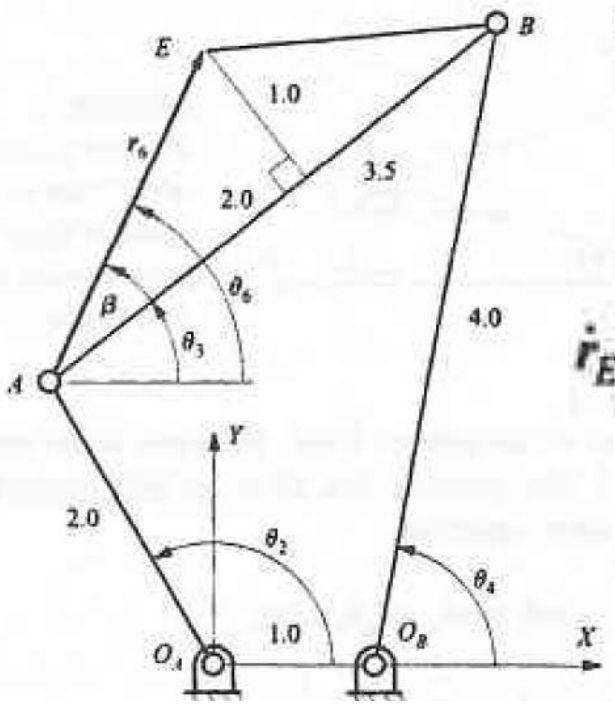
$$\dot{\theta}_5 = -\frac{\dot{r}_{B_x} - \dot{r}_{A_x}}{r_5\sin\theta_5} = \frac{\dot{r}_{B_y} - \dot{r}_{A_y}}{r_5\cos\theta_5}$$

$$\ddot{r}_B = \ddot{r}_A + r_5\ddot{\theta}_5\left(-\sin\theta_5 i + \cos\theta_5 j\right) - r_5\dot{\theta}_5^2\left(\cos\theta_5 i + \sin\theta_5 j\right)$$

$$\ddot{\theta}_5 = -\frac{\left(\ddot{r}_{B_x} - \ddot{r}_{A_x}\right) + r_5\dot{\theta}_5^2\cos\theta_5}{r_5\sin\theta_5} = \frac{\left(\ddot{r}_{B_y} - \ddot{r}_{A_y}\right) + r_5\dot{\theta}_5^2\sin\theta_5}{r_5\cos\theta_5}$$

مثال: در مثال قبل سرعت و شتاب نقطه E_3 را بدست آورید.

$r_1 = 1,\ r_2 = 2,\ r_3 = 3.5,\ r_4 = 4,\ \text{and}\ \theta_1 = 0$



$$\theta_2 = 0,\ \dot{\theta}_2 = 10\ \text{rad/s},\ \ddot{\theta}_2 = 0,\ \text{and}\ \sigma = 1$$

$$\beta = \tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = 26.565^\circ$$

$$r_6 = AE = 2.0/\cos(26.565^\circ) = 2.236\ \text{cm}$$

$$\dot{r}_{E_3} = r_2\dot{\theta}_2\left(-\sin\theta_2 i + \cos\theta_2 j\right) + r_6\dot{\theta}_3\left(-\sin\theta_6 i + \cos\theta_6 j\right)$$

$$\theta_2 = 0,\ \theta_3 = 66.87^\circ,\ \dot{\theta}_2 = 10.0\ \text{rad/s},\ \text{and}\ \dot{\theta}_3 = 20.0\ \text{rad/s}$$

$$\theta_6 = \theta_3 + \beta = 66.87^\circ + 26.565^\circ = 93.435^\circ$$

$$\dot{r}_{E_3} = 2(10)(0i + j) + 2.236(20.0)\left(-\sin(93.435^\circ)i + \cos(93.435^\circ)j\right)$$

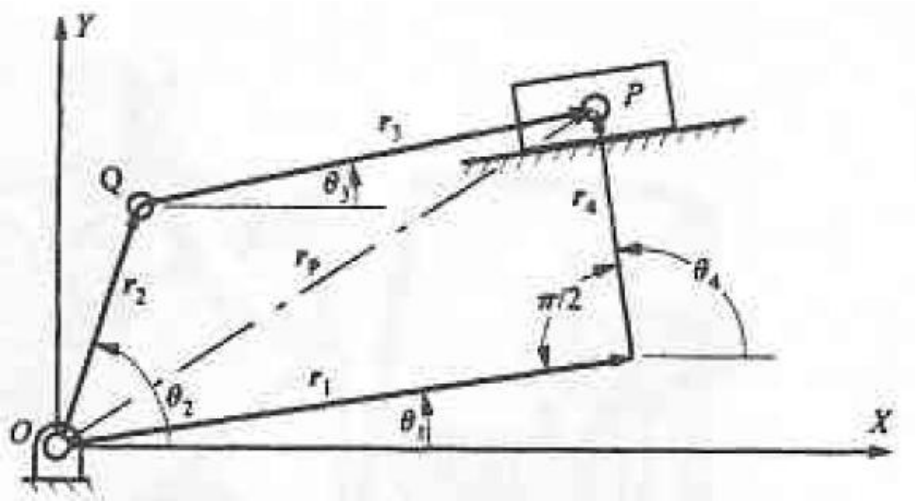
$$= 20j - 44.640i - 2.679j = -44.64i + 17.32j\ \text{cm/s}$$

$$\ddot{\vec{r}}_{E_3} = r_2\ddot{\theta}_2\left(-\sin\theta_2 i + \cos\theta_2 j\right) - r_2\dot{\theta}_2^2\left(\cos\theta_2 i + \sin\theta_2 j\right)$$
$$+r_6\ddot{\theta}_3\left(-\sin\theta_6 i + \cos\theta_6 j\right) - r_6\dot{\theta}_3^2\left(\cos\theta_6 i + \sin\theta_6 j\right)$$

$\theta_2 = 0, \theta_3 = 66.87°, \dot{\theta}_2 = 10.0$ rad/s, $\ddot{\theta}_2 = 0$ rad/s^2, $\dot{\theta}_3 = 20.0$ rad/s, and $\ddot{\theta}_3 = 147.56$ rad/s^2

$$\ddot{\vec{r}}_{E_3} = 0 - 2(10)^2(i + 0j) + 2.236(147.56)\left[-\sin(93.435°)i + \cos(93.435°)j\right]$$
$$-2.236(20.0)^2\left[\cos(93.435°)i + \sin(93.435°)j\right] = -475.76i - 912.56j \text{ cm/s}^2$$

معادلات تحلیلی برای مکانیزم لغزنده و لنگ



$$\mathbf{r}_P = \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3 = \mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_4$$

$$\theta_4 = \theta_1 + \pi/2$$

$$r_2 \sin\theta_2 + r_3 \sin\theta_3 = r_1 \sin\theta_1 + r_4 \sin\theta_4$$

$$r_2 \cos\theta_2 + r_3 \cos\theta_3 = r_1 \cos\theta_1 + r_4 \cos\theta_4$$

معادلات فوق باید در کل سیکل حرکت مکانیزم بر قرار باشد.

توجه نمایید که اندازه بردار r_1 تغییر می کند اما راستای آن (θ_1) ثابت است.

r_2, r_3, r_4, θ_1, and θ_4 are constants

If θ_2 is given, solve θ_3 and r_1 in terms of θ_2

if θ_3 is given solve θ_2 and r_1 in terms of θ_3

حل موقعیت مکانیزم لغزنده-لنگ وقتی که $\theta 2$ ورودی است

مجهولات r_1 و θ_3

$$r_3\cos\theta_3 = r_1\cos\theta_1 + r_4\cos\theta_4 - r_2\cos\theta_2$$

$$r_3\sin\theta_3 = r_1\sin\theta_1 + r_4\sin\theta_4 - r_2\sin\theta_2$$

$$r_3^2 = r_1^2 + r_2^2 + r_4^2 + 2r_1r_4\left(\cos\theta_1\cos\theta_4 + \sin\theta_1\sin\theta_4\right)$$
$$-2r_1r_2\left(\cos\theta_1\cos\theta_2 + \sin\theta_1\sin\theta_2\right) - 2r_2r_4\left(\cos\theta_2\cos\theta_4 + \sin\theta_2\sin\theta_4\right)$$

$$A = 2r_4\left(\cos\theta_1\cos\theta_4 + \sin\theta_1\sin\theta_4\right) - 2r_2\left(\cos\theta_1\cos\theta_2 + \sin\theta_1\sin\theta_2\right)$$

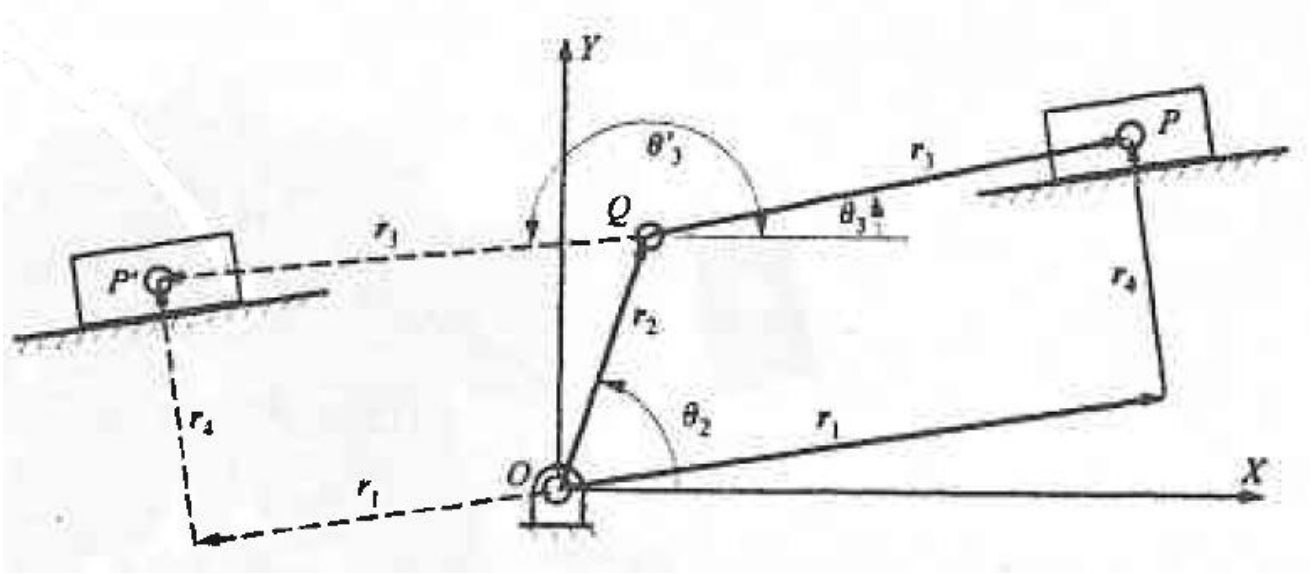
$$B = r_2^2 + r_4^2 - r_3^2 - 2r_2r_4\left(\cos\theta_2\cos\theta_4 + \sin\theta_2\sin\theta_4\right)$$

$$r_1^2 + Ar_1 + B = 0$$

- معادلات سرعت مکانیزم چهار میله

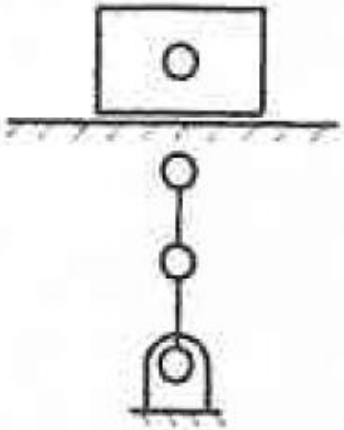
$$r_1 = \frac{-A + \sigma\sqrt{A^2 - 4B}}{2}$$

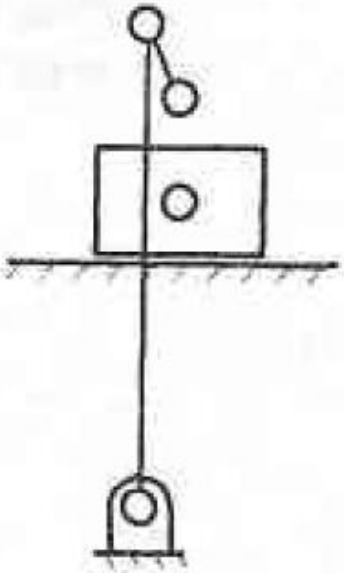
$\sigma = \pm 1$ is a sign variable identifying the assembly mode



- معادلات سرعت مکانیزم چهار میله

r_1 can be complex $(A^2 < 4B)$





مکانیزم قابل مونتاژ نیست

وقتی که r_1 محاسبه شده ، می توان از معادلات حلقه بسته θ_3 را بدست آورد.

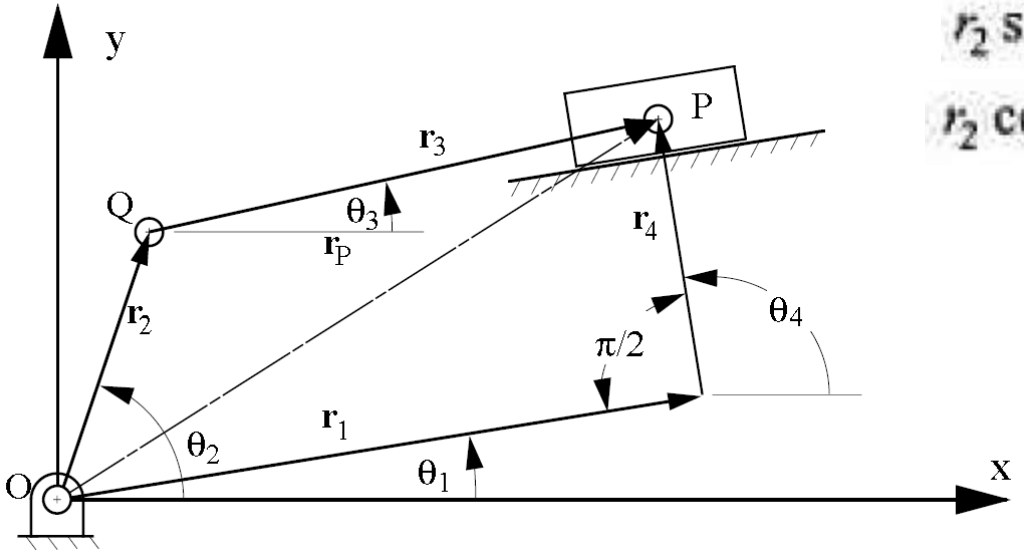
$$\theta_3 = \tan^{-1}\left[\frac{r_1 \sin\theta_1 + r_4 \sin\theta_4 - r_2 \sin\theta_2}{r_1 \cos\theta_1 + r_4 \cos\theta_4 - r_2 \cos\theta_2}\right]$$

با استفاده از تابع atan2 می توان ناحیه مثلثاتی θ_3 را تعیین کرد.

پس از محاسبه کمیات مجهول می توان مختصات هر نقطه روی حلقه برداری را محاسبه نمود.

$$r_P = r_2 + r_3 = r_2\left(\cos\theta_2 i + \sin\theta_2 j\right) + r_3\left(\cos\theta_3 i + \sin\theta_3 j\right)$$

حل موقعیت مکانیزم لغزنده-لنگ وقتی که r_1 ورودی است



$$r_2\sin\theta_2 + r_3\sin\theta_3 = r_1\sin\theta_1 + r_4\sin\theta_4$$

$$r_2\cos\theta_2 + r_3\cos\theta_3 = r_1\cos\theta_1 + r_4\cos\theta_4$$

با حذف r_3 در معادلات فوق داریم :

$$A\cos\theta_2 + B\sin\theta_2 + C = 0$$

$$A = -2r_1r_2\cos\theta_1 - 2r_2r_4\cos\theta_4$$

$$B = -2r_1r_2\sin\theta_1 - 2r_2r_4\sin\theta_4$$

$$C = r_1^2 + r_2^2 + r_4^2 - r_3^2 + 2r_1r_4\left(\cos\theta_1\cos\theta_4 + \sin\theta_1\sin\theta_4\right)$$

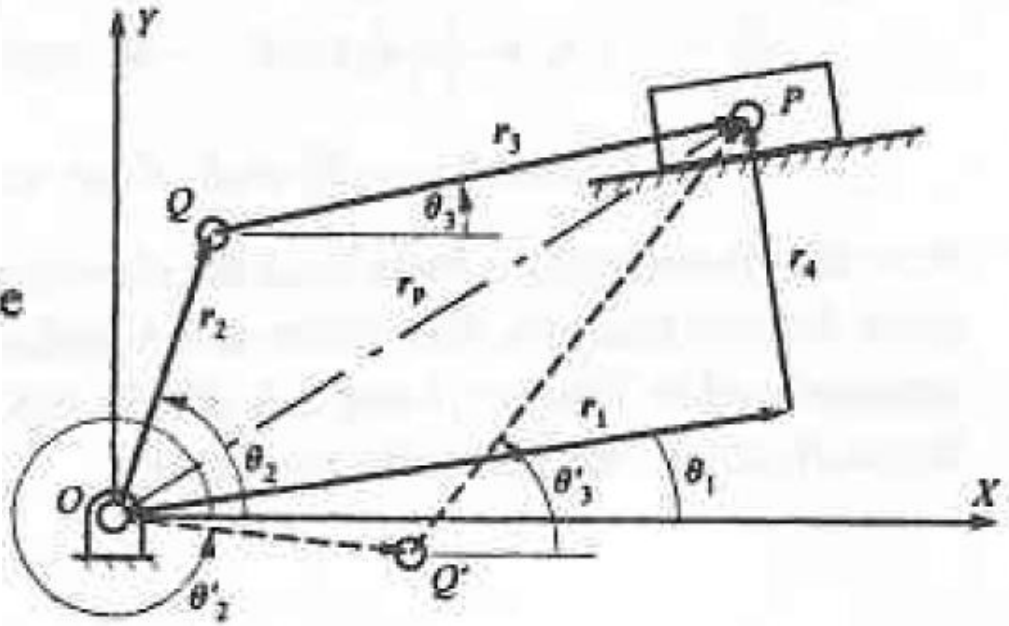
$$A\left(1-t^2\right)+B(2t)+C\left(1+t^2\right)=0$$

$$t=\tan\left(\frac{\theta_2}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad (C-A)t^2+2Bt+(A+C)=0$$

$$t=\frac{-2B+\sigma\sqrt{4B^2-4(C-A)(C+A)}}{2(C-A)}=\frac{-B+\sigma\sqrt{B^2-C^2+A^2}}{C-A}$$

$$\theta_2=2\tan^{-1}t$$

$\sigma=\pm 1$ is a sign variable identifying the assembly mode



حل سرعت مکانیزم لغزنده و لنگ

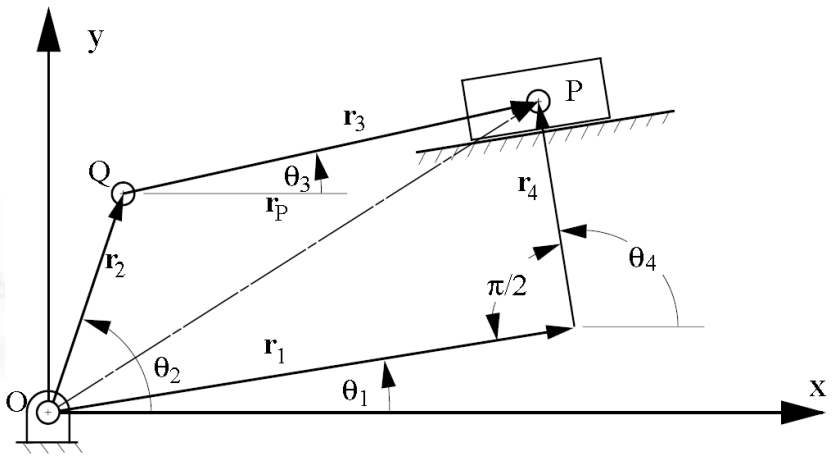
$$\dot{r}_P = \dot{r}_2 + \dot{r}_3 = \dot{r}_1 + \dot{r}_4$$

$$-r_2\dot{\theta}_2 \sin\theta_2 - r_3\dot{\theta}_3 \sin\theta_3 = \dot{r}_1 \cos\theta_1$$

$$r_2\dot{\theta}_2 \cos\theta_2 + r_3\dot{\theta}_3 \cos\theta_3 = \dot{r}_1 \sin\theta_1$$

$$\begin{bmatrix} \cos\theta_1 & r_J \sin\theta_J \\ \sin\theta_1 & -r_J \cos\theta_J \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{r}_1 \\ \dot{\theta}_J \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -r_M\dot{\theta}_M \sin\theta_M \\ r_M\dot{\theta}_M \cos\theta_M \end{Bmatrix}$$

$M = 2$ and $J = 3$ for link 2 as the input,
$M = 3$ and $J = 2$ for link 3 as the input.



If $\dot{r}_1$ is input,
then $\dot{\theta}_2$ and $\dot{\theta}_3$ will be unknown

$$\begin{bmatrix} -r_2 \sin\theta_2 & -r_3 \sin\theta_3 \\ r_2 \cos\theta_2 & r_3 \cos\theta_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dot{r}_1 \cos\theta_1 \\ \dot{r}_1 \sin\theta_1 \end{Bmatrix}$$

حل شتاب مکانیزم لغزنده و لنگ

$$\ddot{\vec{r}}_P = \ddot{\vec{r}}_2 + \ddot{\vec{r}}_3 = \ddot{\vec{r}}_1 + \ddot{\vec{r}}_4$$

$$-r_2\ddot{\theta}_2 \sin\theta_2 - r_2\dot{\theta}_2^2 \cos\theta_2 - r_3\ddot{\theta}_3 \sin\theta_3 - r_3\dot{\theta}_3^2 \cos\theta_3 = \ddot{r}_1 \cos\theta_1$$

$$r_2\ddot{\theta}_2 \cos\theta_2 - r_2\dot{\theta}_2^2 \sin\theta_2 + r_3\ddot{\theta}_3 \cos\theta_3 - r_3\dot{\theta}_3^2 \sin\theta_3 = \ddot{r}_1 \sin\theta_1$$

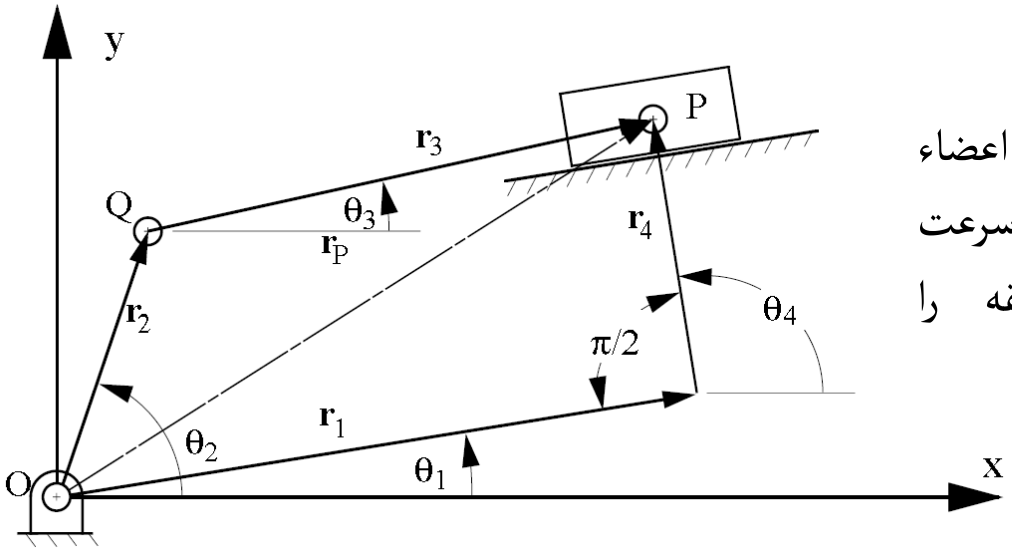
$$\begin{bmatrix} \cos\theta_1 & r_J \sin\theta_J \\ \sin\theta_1 & -r_J \cos\theta_J \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{r}_1 \\ \ddot{\theta}_J \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -r_M\ddot{\theta}_M \sin\theta_M - r_M\dot{\theta}_M^2 \cos\theta_M - r_J\dot{\theta}_J^2 \cos\theta_J \\ r_M\ddot{\theta}_M \cos\theta_M - r_M\dot{\theta}_M^2 \sin\theta_M - r_J\dot{\theta}_J^2 \sin\theta_J \end{Bmatrix}$$

$M = 2$ and $J = 3$ for link 2 as the input,
$M = 3$ and $J = 2$ for link 3 as the input.

If $\ddot{r}_1$ is input, then $\ddot{\theta}_2$ and $\ddot{\theta}_3$ will be unknown

$$\begin{bmatrix} -r_2 \sin\theta_2 & -r_3 \sin\theta_3 \\ r_2 \cos\theta_2 & r_3 \cos\theta_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\theta}_2 \\ \ddot{\theta}_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} r_2\dot{\theta}_2^2 \cos\theta_2 + r_3\dot{\theta}_3^2 \cos\theta_3 + \ddot{r}_1 \cos\theta_1 \\ r_2\dot{\theta}_2^2 \sin\theta_2 + r_3\dot{\theta}_3^2 \sin\theta_3 + \ddot{r}_1 \sin\theta_1 \end{Bmatrix}$$

سرعت و شتاب نقطه P



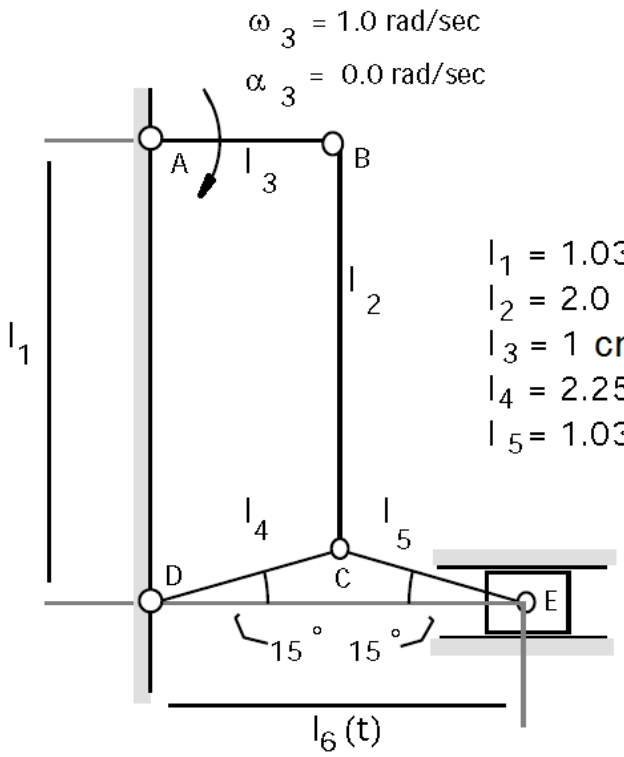
وقتی سرعت و شتاب زاویه ای اعضاء محاسبه شدند، براحتی می توان سرعت و شتاب خطی هر نقطه روی حلقه را بدست آورد.

$$\dot{r}_P = \dot{r}_2 + \dot{r}_3 = \left(-r_2\dot{\theta}_2 \sin\theta_2 - r_3\dot{\theta}_3 \sin\theta_3\right)i + \left(r_2\dot{\theta}_2 \cos\theta_2 + r_3\dot{\theta}_3 \cos\theta_3\right)j$$

$$\ddot{r}_P = \ddot{r}_2 + \ddot{r}_3 = -\left(r_2\ddot{\theta}_2 \sin\theta_2 + r_2\dot{\theta}_2^2 \cos\theta_2 + r_3\ddot{\theta}_3 \sin\theta_3 + r_3\dot{\theta}_3^2 \cos\theta_3\right)i$$
$$+\left(r_2\ddot{\theta}_2 \cos\theta_2 - r_2\dot{\theta}_2^2 \sin\theta_2 + r_3\ddot{\theta}_3 \cos\theta_3 - r_3\dot{\theta}_3^2 \sin\theta_3\right)j$$

تمرینات و مسائل فصل ۷ قسمت اول

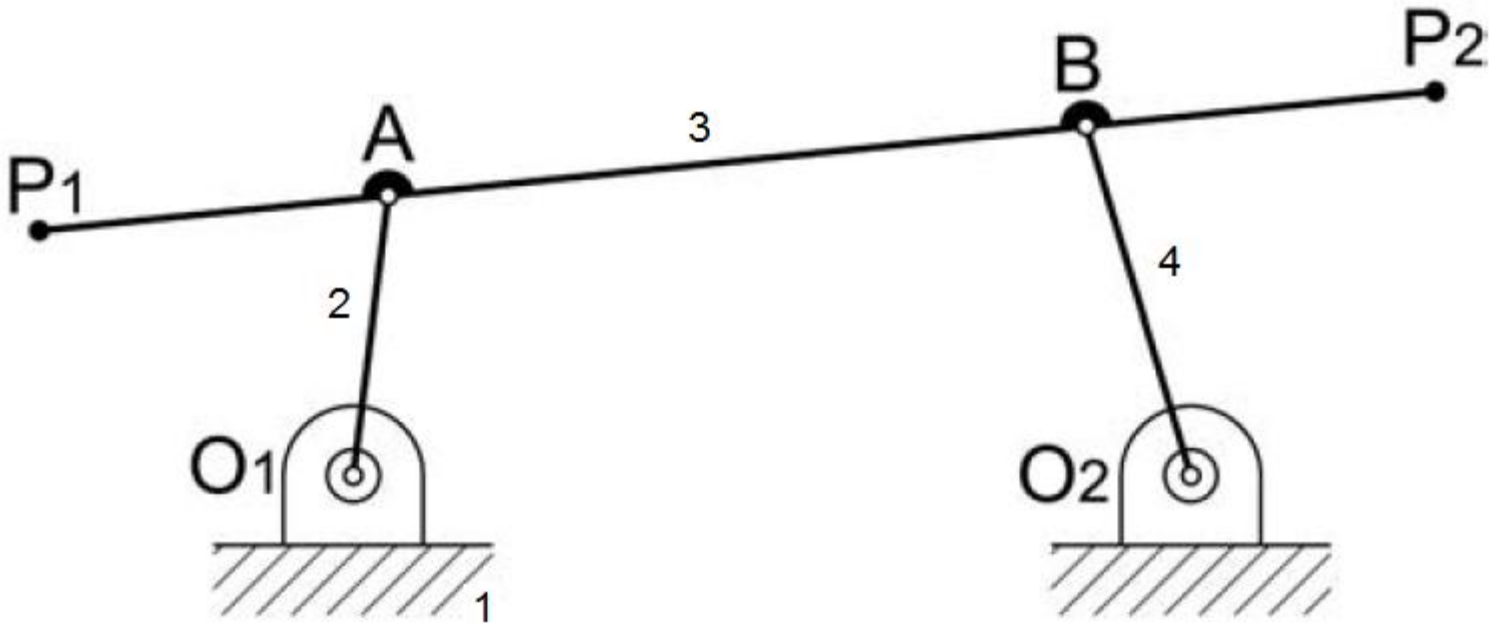
۱- با استفاده از روش تحلیلی سرعت و شتاب زاویه ای بازوهای ۲ ، ۴ و ۵ را بدست آورده سپس شتاب خطی نقطه **E** را محاسبه نمایید.



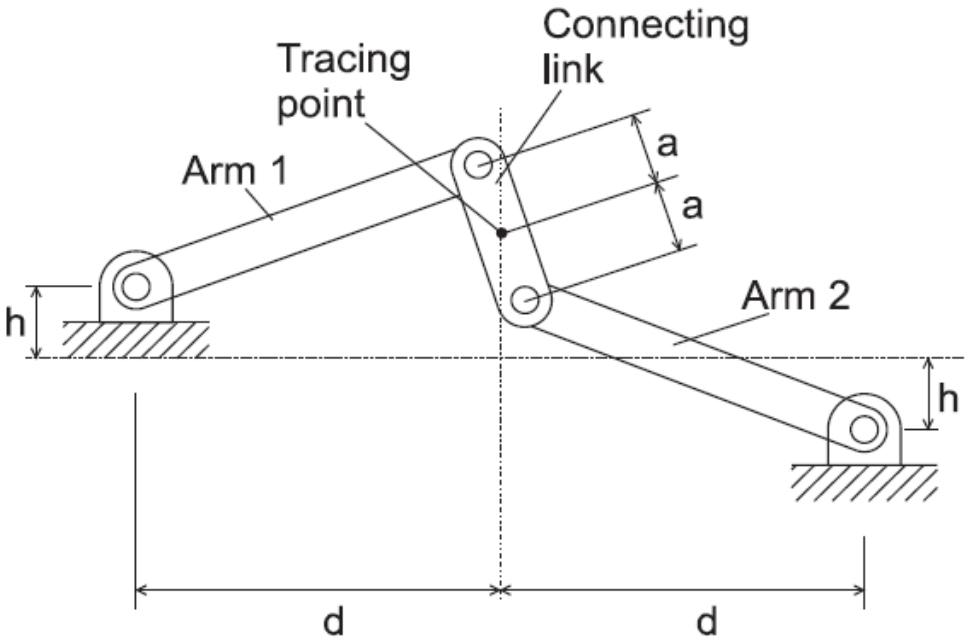
l_1 = 1.035 cm
l_2 = 2.0 cm
l_3 = 1 cm
l_4 = 2.259 cm
l_5 = 1.035 cm

velocity scale: 1cm/sec = 2 cm
acceleration scale: 1cm/sec ^{2}= 2 cm

۲- در مکانیزم چهار میله زیر اگر عضو ۲ محرک باشد ، معادلات تغییر مکان ، سرعت و شتاب نقاط P_1 و P_2 را بدست آورده و برای یک سیکل حرکت آنها را رسم نمایید.



۳- در مکانیزم چهار میله double-rocker نشان داده شده چه رابطه ای باید بین ابعاد اعضاء برقرار باشد تا coupler دوران کامل داشته باشد. مسیر حرکت (tracing point) را رسم نمایید.



2a = 1 cm, h = 0.5 cm, 2d = 10 cm, and that the arms have equal length 7 cm.

پایان